D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Loesung 9

Bitte wenden!

1. Folgende Laplace-Transformationen seien gegeben:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}, \qquad \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = \frac{1}{s^3}, \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Transformationssätze die Laplace-Transformierte folgender Funktionen

a) $\sin(at)$, $a > 0$
Lösung: Gemäss Ähnlichkeitssatz ist die Laplace-Transformation

$$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

b) t
Lösung: Gemäss Ableitungssatz ist die Laplace-Transformation

$$sF(s) - f(0) = s\frac{1}{s^3} - 0 = \frac{1}{s^2}$$

c) $e^{-at}\sin(t)$, $a > 0$
Lösung: Gemäss Dämpfungssatz ist die Laplace-Transformation

$$F(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2+1}$$

d) $\cos(t)$
Lösung: Da $\sin'(t) = \cos(t)$ ist gemäss Ableitungssatz die Laplace-Transformation

$$sF(s) - f(0) = s\frac{1}{s^2+1} - 0 = \frac{s}{s^2+1}$$

Alternativ kann auch der Integrationssatz verwendet werden.

e) $\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)' = \frac{d}{dt}\frac{\sin(t)}{t}$
Lösung: Gemäss Ableitungssatz ist die Laplace-Transformation

$$sF(s) - f(0) = s\arctan\left(\frac{1}{s}\right) - 1.$$

f) $\frac{1}{6}t^3$
Lösung: Gemäss Integrationssatz ist die Laplace-Transformation

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^4}.$$

Siehe nächstes Blatt!

g) $\frac{\sin(at)}{t}$, $a > 0$

Lösung: Da $\frac{\sin(at)}{t} = a\frac{\sin(at)}{at}$ ist gemäss Ähnlichkeis- und Linearitäsatz die Laplace-Transformation

$$a\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) = \arctan\left(\frac{1}{\frac{s}{a}}\right) = \arctan\left(\frac{a}{s}\right).$$

h) $\int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du$

Lösung: Gemäss Integrationssatz ist die Laplace-Transformation

$$\frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

Bitte wenden!

2. Laplace-Transformation periodischer Funktionen mittels Verschiebung nach links

Der Verschiebungssatz (für die Verschiebung nach links) besagt, dass aus $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ folgt, dass für $a > 0$

$$\mathcal{L}\left\{f(t+a)\cdot\sigma(t)\right\} = e^{as}\cdot\left(F(s) - \int_0^a f(t)\cdot e^{-st}dt\right)$$

gilt, wobei

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < 0 \\ 1 & \text{wenn } t \geq 0. \end{cases}$$

a) Benützen Sie den Verschiebungssatz um zu zeigen, dass für eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\cdot\int_0^T f(t)\cdot e^{-st}dt$$

gilt.
Lösung: Da f periodisch ist gilt $f(t+T)\cdot\sigma(t) = f(t)\cdot\sigma(t)$. Gemäss Verschiebungssatz gilt dann

$$F(s) = e^{Ts}\left(F(s) - \int_0^T f(t)e^{-st}dt\right).$$

Auflösen nach $F(s)$ ergibt

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\cdot\int_0^T f(t)\cdot e^{-st}dt$$

b) Sei f periodisch mit Periode 3 und

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{wenn } 1 \leq t < 2\,. \\ 2 & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformation von f.
Lösung: Es gilt

$$\int_0^3 f(t)e^{-st}dt = \int_1^2 e^{-st}dt + 2\int_2^3 e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}|_1^2 + 2\cdot -\frac{1}{s}e^{-st}|_2^3 = \frac{e^{-s}+e^{-2s}-2e^{-3s}}{s}.$$

Also

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-3s}}\cdot\int_0^3 f(t)\cdot e^{-st}dt = \frac{e^{-s}+e^{-2s}-2e^{-3s}}{s(1-e^{-3s})}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Grenzwertsatz

Der Grenzwertsatz besagt

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} [s \cdot F(s)] \quad \text{und} \quad f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} [s \cdot F(s)]$$

Verwenden Sie in den folgenden Beispielen den Grenzwertsatz um jeweils $f(0)$ aus der Laplacetransformation $F(s)$ zu berechnen.

- $F(s) = \frac{s^9}{s^{10}+1}$
  Lösung: Es gilt

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} [s \cdot F(s)] = \lim_{s\to\infty} \frac{s^{10}}{s^{10}+1} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{1+s^{-10}} = 1.$$

- $F(s) = e^{-s}$
  Lösung: Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom gilt

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} [s \cdot F(s)] = \lim_{s\to\infty} se^{-s} = 0.$$

- $F(s) = \frac{1}{s+\sin(s)}$
  Lösung: Da $|\sin(s)| \leq 1$ und $s^{-1} \to 0$ für $s \to \infty$ gilt

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} [s \cdot F(s)] = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s+\sin(s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{1+s^{-1}\sin(s)} = 1.$$

Bitte wenden!

4. Faltungssatz

Der Faltungssatz besagt

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\} \cdot \mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\}.$$

Verwenden Sie den Faltungssatz um für $a > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}$$

zu berechnen.
Lösung: Es gilt

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at},$$

also

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = t * e^{at}.$$

Wir erhalten durch partielle Integration

$$t*e^{at} = \int_0^t u e^{a(t-u)} du = u\frac{-1}{a}e^{a(t-u)}|_0^t - \int_0^t \frac{-1}{a}e^{a(t-u)} du = -t\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}e^{a(t-u)}|_0^t = \frac{-at + e^{at} - 1}{a^2}.$$