D-HEST, Mathematik III HS 2015
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Serie 1

Bitte wenden!

1. Für jede gerade 2π-periodische Funktion f mit Fourier-Koeffizienten a_n, b_n gilt

(a) $a_n = 0$

(b) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$

(c) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$

(d) $b_n = 0$

(e) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$

(f) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$

(g) Nichts davon.

(h) Weiss ich nicht.

Siehe nächstes Blatt!

2. Für jede <u>ungerade</u> 2π-periodische Funktion f mit Fourier-Koeffizienten a_n, b_n gilt

(a) $a_n = 0$

(b) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$

(c) $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$

(d) $b_n = 0$

(e) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$

(f) $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$

(g) Nichts davon.

(h) Weiss ich nicht.

Bitte wenden!

3. Seien $f, g \in C^1([-1,1])$ mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

Angenommen, der Graph von f und der Graph von g schneiden sich senkrecht, d.h. die Tangenten in einem gemeinsamen Punkt stehen senkrecht aufeinander.

Dann sind f und g orthogonal bezüglich dieses Skalarprodukts.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

(c) Weiss ich nicht.

4. Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 3.

(a) Richtig.

(b) Falsch.

(c) Weiss ich nicht.

Siehe nächstes Blatt!

5. Berechnen Sie folgende Integrale, welche typische Beispiele in der Theorie der Fourier-Reihen sind.

a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)dx \quad$ für $n = 1, 2, 3$ und für beliebiges $n \neq 0$.

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi x\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nx)\sin(mx)dx, \quad$ wobei $n, m \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Verwenden Sie $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

6. Koeffizienten der Fourier-Reihe

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

zu den folgenden Funktionen f:

- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{für} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$
- $f(x) = \sin^2(x)$

b) Plotten Sie mit den gefundenen Koeffizienten die trigonometrischen Polynome

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für $f(x) = |x|$ mit $N = 1$, $N = 5$ und $N = 15$. Was beobachten Sie?

7. Bestimmen Sie die trigonometrischen Koeffizienten a_n, b_n der Fourier-Reihe mit Periode T zu den folgenden Funktionen f, g, h:

- $f(x) = \cos(x/2), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T = 2\pi$
- $g(x) = 1 - e^{-x/2}, \quad x \in [0, 2[, \quad T = 2$
- $h(x) = 1 - e^{-2\pi x}, \quad x \in [0, 1[, \quad T = 1$