D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematatik III — HS 2015

Serie 12

1. Seien u_1 und u_2 zwei L-periodische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

auf dem geschlossenen Draht. Falls u_1 und u_2 zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen, so stimmen sie für alle $t > 0$ überein (Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenen Anfangswerten). Der folgende Beweis dieser Tatsache ist durcheinander geraten. Bringen Sie die einzelnen Schritte in die richtige Reihenfolge:

1. Falls u_1 und u_2 für $t = 0$ übereinstimmen, so gilt für $t > 0$
$$\begin{aligned} 0 &= \max_{x\in\mathbb{R}}(u_1(x,0) - u_2(x,0)) \geq \max_{x\in\mathbb{R}}(u_1(x,t) - u_2(x,t)) \\ &\geq \min_{x\in\mathbb{R}}(u_1(x,t) - u_2(x,t)) \geq \min_{x\in\mathbb{R}}(u_1(x,0) - u_2(x,0)) = 0. \end{aligned}$$
2. Da u_1 und u_2 Lösungen der homogenen, linearen PDE (1) sind, ist auch $u_1 - u_2$ eine Lösung.
3. Das Maximum- und das Minimumprinzip gilt für $u := u_1 - u_2$, d.h. $\max_{x\in\mathbb{R}} u(x,t)$ ist monoton fallend in t und $\min_{x\in\mathbb{R}} u(x,t)$ ist monoton wachsend in t.
4. Somit folgt $u_1 = u_2$ für alle $t > 0$.

Bitte wenden!

2. Wir suchen eine stationäre Temperaturverteilung $u(x, y)$ auf dem Quadrat Q mit Ecken $(0,0), (1,0), (0,1)$ und $(1,1)$. Drei Seiten von Q werden auf der Temperatur 0 gehalten, auf der vierten Seite gelte $u(x,1) = \sin(3\pi x) + \sin(6\pi x)$. Die gesuchte Funktion erfüllt

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ auf } Q, \text{ und } \begin{cases} u(0,y) = 0 & \text{für } 0 < y < 1 \\ u(1,y) = 0 & \text{für } 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 0 & \text{für } 0 < x < 1 \\ u(x,1) = \sin(3\pi x) + \sin(6\pi x) & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}.$$

a) Machen Sie einen Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ und bestimmen Sie die Differentialgleichungen für die Funktionen X und Y.
Hinweis: Achten Sie darauf, das Vorzeichen der Konstante so zu wählen, dass für X periodische Lösungen auftreten.

b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für X unter Beachtung der Randbedingungen $X(0) = X(1) = 0$.

c) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung für Y unter Beachtung der Randbedingungen $Y(0) = 0$.

d) Bestimmen Sie durch Superposition der gefundenen Lösungen die gesuchte Funktion $u(x,y)$.

e) Wie lautet die Lösung von (1), wenn die Randbedingung $u(x,1) = \sin(3\pi x) + \sin(6\pi x)$ für $0 < x < 1$ durch $u(x,1) = x - x^2$ für $0 < x < 1$ ersetzt wird?
Hinweis: Verwenden Sie Serie 11 Aufgabe 3

Abgabetermin: 15.12.2015.