

D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Serie 13

Bitte wenden!

1. Kompartimentsystem

Im Folgenden seien a, b, c, d, e reelle Zahlen mit $0 < a, b, c, d < 1$ und

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} -a & c & d \\ a & -(b+c) & 0 \\ 0 & b & -(d+e) \end{bmatrix}.$$

Das lineare DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ mit $t \geq 0$ beschreibe die Entwicklung in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3 wobei $y_i(t)$ die Entwicklung in K_i sei, für $i = 1, 2, 3$.

- Zeichnen Sie das Kompartimentsystem und beschriften sie die Pfeile mit a, b, c, d, e . Achten Sie dabei auf die Pfeilrichtung!
- Zeigen Sie, falls $e = 0$, dass es für jede Wahl von a, b, c, d einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems $y'(t) = Ay(t)$, $t \geq 0$ gibt, das heißt, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $t \mapsto y^\infty(t)$, welche nicht von t abhängt.

Wir betrachten nun das DGL-System:

$$x'(t) = Bx(t) + f(t) \quad \text{wobei} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{mit Anfangswert} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für verschiedene Wahlen von f .

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B . Berechnen Sie daraus e^{Bt} , und somit die Lösung $x(t)$ falls $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Sei nun $f(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Substitution $z(t) = P^{-1}x(t)$ für eine geeignete Matrix P , um die Differentialgleichungen zu entkoppeln und separat zu lösen. Bestimmen Sie dann die Lösung $x(t)$ durch Rücksubstitution.

Siehe nächstes Blatt!

2. Fourier Reihen

Die Funktion f sei gegeben durch:

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi).$$

Weiterhin sei:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

die Fourier Reihe zur Funktion, die aus f durch 2π -periodische Fortsetzung entsteht.

- a) Zeigen Sie, dass f ungerade ist. Was können Sie hieraus über die Koeffizienten a_n , $n \geq 0$, und b_n , $n \geq 1$ von F folgern?
- b) Bestimmen Sie $F(x)$.
- c) Sei $g(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, eine *beliebige* stetige, ungerade Funktion, und:

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad \text{mit } x \in (-\pi, \pi),$$

die zugehörige Fourier Reihe in komplexer Form. Für welche $n \in \mathbb{Z}$ muss $c_n = 0$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort. *Hinweis:* Verwenden Sie a) und b).

Gegeben sei folgende inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y''(x) + 3y(x) = \sin^3(x).$$

- d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x) : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dieser Gleichung. Verwenden Sie hierzu den Ansatz:

$$y_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin(nx),$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $\tilde{b}_n \in \mathbb{R}$, um eine partikuläre Lösung zu finden. *Hinweis:* es gilt $\sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$.

Bitte wenden!

3. Laplace Transformation

Notation: im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f , sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) In dieser Teilaufgabe sei $f(t) = te^{\alpha t}$ mit $\alpha > 0$.

- Berechnen Sie $\mathcal{L}\{f\}(s)$ direkt aus der Definition.
- Bestimmen Sie mithilfe des Ableitungssatzes die Originalfunktion zu:

$$\frac{s}{(s - \alpha)^2}.$$

b) Sei:

$$g(t) = 5 \cos(t - 4) \sigma(t - 4) + e^{-3t} (2t)^3,$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ für $u < 0$. Wie lautet $\mathcal{L}\{g\}(s)$?

c) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion $h(t)$ zu:

$$\frac{s}{(s^2 + 1)(s - a)}, \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

d) Für gegebene $A \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ seien die Funktionen $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} \phi_1'' + \beta(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \\ \phi_2'' - \beta(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \end{aligned}$$

zur Anfangsbedingung $\phi_1(0) = A$, $\phi_2(0) = 0$ und $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) = 0$, wobei $\phi_i'(t) = d\phi_i(t)/dt$ die Ableitung nach t bezeichnet.

- Seien $F_i(s) = \mathcal{L}\{\phi_i\}(s)$ für $i = 1, 2$. Bestimmen Sie F_1 und F_2 in Abhängigkeit von s , A und β .
- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $\phi_1(t)$. *Hinweis:* machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

Abgabetermin: 22.12.2015.