D-HEST, Mathematik III HS 2015
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Serie 6

1. Ein simples Populationsmodell

Man betrachte ein biologisches Populationsmodell, bei welchem die Grösse $y(t)$ der Population zur Zeit $t \geq 0$ gegeben ist durch die (eindeutige) Lösung der Differentialgleichung

$$y' = wy - sy^2, \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

für gegebene Parameter $w, s > 0$ und Anfangspopulation $y_0 \geq 0$. Die Interpretation ist wie folgt: unter Vernachlässigung des zweiten Terms ist die Wachstumsrate y' proportional zur Anzahl y der Individuen mit Proportionalitätsfaktor w (genannt Wachstumskonstante). Der zweite Term modelliert die Tatsache, dass sich bei zunehmender Population die Individuen durch (Zweier-)stösse gegenseitig behindern und das Wachstum damit gehemmt wird (s heisst in diesem Zusammenhang Stossparameter).

a) Für welche Werte von $y_0 \geq 0$ (in Abhängigkeit von w und s) ist die Lösung des Anfangswertproblems (1) zeitlich konstant, i.e. $y'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$?

b) Bestimmen Sie die Lösung von (1) (in Abhängigkeit von w und s) für gegebene Anfangspopulation y_0 mit $0 < y_0 < \frac{w}{s}$ und interpretieren Sie Ihre Lösung.

Hinweis: Es gilt $\frac{a}{y(a-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y}$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, a).

c) Was geschieht im Fall $y_0 > \frac{w}{s}$?

Bitte wenden!

2. Lotka Volterra mit zwei Beutetieren

Ein Student der Biologie studiert das Verhalten von Luchsen (Räuber, L) und deren Wechselwirkung mit der Rehpopulation (Beute, R) im Schweizer Jura. Zum besseren Verständnis konstruiert er ein Modell nach Lotka-Volterra, welches die zeitliche Entwicklung beider Spezies beschreibt mit der Zusatzannahme, dass die Biomasse der gefressenen Rehe verlustfrei in Luchsbiomasse umgewandelt wird. L und R seien dimensionslose Grössen. Bezeichnungen und Werte:

- Wachstumsrate der Rehe k_1, Sterberate der Luchse k_2.
- Proportionalitätsfaktor k_3 der Begegnungen L und R (d.h. der Faktor k_3RL beschreibt die Rehe welche gefressen werden).
- Zahlenwerte: $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.02$, $k_3 = 0.002$, $k_4 = 0.03$, $k_5 = 0.001$.

a) Helfen Sie dem Studenten: Stellen Sie das DGL-System auf und zeichnen Sie ein Boxschema des Systems (Kompartiment-Modell).

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems.

c) Nach einer Analyse des Mageninhalts eines jurassischen Luchses bemerkt der Student, dass Luchse auch manchmal Feldhasen fressen. Er ändert das Modell und bittet Sie noch einmal um Hilfe.

Führen Sie eine zweite Beute H mit der Wachstumsrate k_4 ein, welche durch den Luchs mit k_5HL gefressen wird.

Wie sieht das modifizierte Modell aus, wie lauten die modifizierten Gleichungen?

d) Berechnen Sie die neuen Fixpunkte des Systems.

Siehe nächstes Blatt!

3. Medikamentenmenge im Blut

Für ein Medikament sei folgendes 2-Box-Kompartiment-Modell mit $0 < b < 1$ gegeben:

$$\boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{\;\;b\;\;} \boxed{\text{Leber}}$$

Dies bedeutet, dass das Medikament mit einer Rate proportional zur Medikamentenmenge im Blut (und Proportionalitätskonstante b) in die Leber fliesst. Zur Zeit $t \geq 0$ sei die Medikamentenmenge im Blut $y_1(t)$, in der Leber sei sie $y_2(t)$.

a) Zu Beginn $t = 0$ sei die Menge im Blut gleich $y_{1,0}$ und in der Leber gleich 0. Bestimmen Sie die Entwicklungen der Medikamentenmengen:

$$t \mapsto y_1(t), \quad t \mapsto y_2(t)$$

und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $y_{1,0} = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

b) Um eine Mindestmenge $y_{1,1}$ im Blut mit $0 < y_{1,1} < y_{1,0}$ zu sichern, müssen wir die Infusion mit $y_{1,0}$ periodisch wiederholen. Bestimmen Sie die Periode in Abhängigkeit von b, $y_{1,0}$, $y_{1,1}$ (das heisst bestimmen Sie die Zeit nachdem die Mindestmenge $y_{1,1}$ erreicht wird) und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

c) Wir nehmen nun an, dass wir eine konstante Blutinfusion $g > 0$ haben. Zu Beginn sei in beiden Kompartimenten die Medikamentenmenge gleich 0.

1. Zeichnen Sie das zugehörige Kompartiment-Modell, bestimmen Sie die Entwicklungen $t \mapsto y_1(t), t \mapsto y_2(t)$ und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $g = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.
2. Angenommen, wir unterbrechen die Infusion bei $t = T_1$ mit einer Menge im Blut Y_1. Bestimmen Sie den Verlauf für $t \geq T_1$. Um eine Mindestmenge von Y_2 im Blut zu garantieren, starten wir die Infusion wieder zum Zeitpunkt T_2 (an dem gilt $y_1(T_2) = Y_2$). Bestimmen Sie T_2 und skizzieren Sie den Verlauf zwischen Y_1 und Y_2.

Bitte wenden!

4. Muskel, Blut und Leber

Gegeben sei folgendes 3-Box-Kompartiment-Modell für $0 < a, b, c < 1$:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Muskel}} \arrow[r, "a"'] & \boxed{\text{Blut}} \arrow[r, "b"'] & \boxed{\text{Leber}} \arrow[l, bend right, "c"'] \end{tikzcd}$$

a) Stellen Sie das zugehörige DGL-System $y' = Ay$ auf, welches die Entwicklung einer Substanz in den Kompartimenten beschreibt.

b) Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $\{t \mapsto y^\infty(t)\}$, welche nicht von t abhängt.

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ für $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$.

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = (1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$ und $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$.

Hinweis: Betrachten Sie $J = T^{-1}AT$ mit den Matrizen:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abgabetermin: 3.11.2015.