Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Serie 8

1. Die Treppenfunktion

Berechnen Sie für gegebene Parameter a, $A > 0$ die Laplace-Transformierte der *Treppenfunktion*:

$$f(t) := nA \quad \text{im Intervall} \quad na \leq t < (n+1)a$$

für alle $n \geq 0$.

Hinweis: Es sei die geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für alle $|q| < 1$.

2. Der Faltungssatz

Zeigen Sie, dass:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\} = \frac{t\sin(at)}{2a}$$

für alle $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie den Faltungssatz und für das entstehende Faltungsintegral das Additionstheorem: $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

3. Eine Periodische Funktion

Für eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, i.e. $f(t+T) = f(t)$ für alle $t > 0$, gilt:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

wie man aus der Definition $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ durch Aufspaltung des Integrals über Intervalle der Länge T erkennt. Im Folgenden seien $a, A > 0$. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

a) f periodisch mit $T = a$ und:

$$f(t) = -\frac{A}{a}(t-a) \quad \text{für} \quad 0 \le t < a\,.$$

b) f periodisch mit $T = 2a$ und:

$$f(t) = \begin{cases} A\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) & \text{für} \quad 0 \le t < a \\ 0 & \text{für} \quad a \le t < 2a\,. \end{cases}$$

4. Laplacetransformation und Differentialgleichungen

Sei $f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ mit $\omega > 0$ und $A, B \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ auf herkömmliche Art.

b) Die Funktion f ist bekanntlich auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $f'' = -\omega^2 f$. Bestimmen Sie $F(s)$ erneut, indem Sie die Laplace-Transformation auf diese Differentialgleichung anwenden und dabei den Ableitungssatz für Originalfunktionen verwenden.

Abgabetermin: 17.11.2015.