2.4 Gekoppelte lineare Differentialgleichungen

Die Untersuchung der Normalformen von Matrizen soll nun auf die Lösung von gekoppelten Differentialgleichungen angewendet werden. Hier zunächst zwei Beispiele dazu.

2.42 Beispiel Nehmen wir an, wir betrachten eine Population von Raubtieren und eine Population von dazugehörigen Beutetieren. Weil die Raubtiere die Beute fressen, sinkt mit steigender Anzahl Raubtiere die Menge an Beute, so dass sich daraufhin die Überlebenschancen der Raubtiere verschlechtern und ihre Anzahl wieder abnimmt. Dadurch können mehr Beutetiere überleben, was wiederum (mit Zeitverzögerung) zum Anwachsen der Raubtierpopulation führt. Dieser Sachverhalt wird durch die sogenannten *Räuber-Beute-Gleichungen* modelliert. Eine vereinfachte Version davon sei nun beschrieben. Die Funktion $x_1(t)$ gebe die Anzahl der Raubtiere an (jeweils zum Zeitpunkt t) und $x_2(t)$ die Anzahl der Beutetiere, und es seien durchschnittlich n_1 Raubtiere und n_2 Beutetiere vorhanden. Natürlich sind die Anzahlen eigentlich immer ganze Zahlen, aber bei genügend grossen Populationen können wir uns die Funktionen x_1, x_2 als stetige Funktionen von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ denken. Dann gehen wir von folgenden Differentialgleichungen aus:

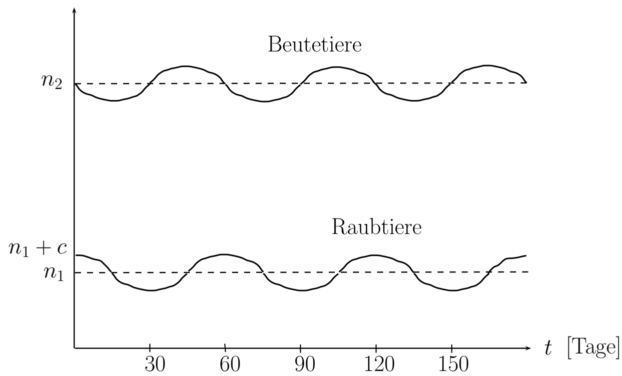
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \alpha\,(x_2(t) - n_2) \\ x_2'(t) &= -\alpha\,(x_1(t) - n_1) \end{aligned}$$

Hier steht $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ für die Zeit, und $\alpha > 0$ ist eine Proportionalitätskonstante. Die Lösung dieses Systems lautet

$$x_1(t) = n_1 + c\cos(\alpha t + \omega) \quad \text{und} \quad x_2(t) = n_2 - c\sin(\alpha t + \omega) \quad (t \geq 0).$$

Hier sind c, ω passende Konstanten. Ist zum Beispiel konkret $\alpha = \frac{2\pi}{60}$, so lautet die Lösung des Systems zu den Anfangswerten $x_1(0) = n_1 + c$ und $x_2(0) = n_2$:

$$x_1(t) = n_1 + c\cos(\frac{2\pi}{60}t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = n_2 - c\sin(\frac{2\pi}{60}t)\,.$$



Wenn die Zeit t in Tagen gemessen wird, ist hier nach 60 Tagen zum erstenmal der Ausgangszustand wieder erreicht.

2.43 Beispiel Nehmen wir nun an, die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ beschreiben die Grösse von zwei Populationen, die wechselseitig voneinander profitieren (zum Beispiel Bienen und Apfelbäume, oder Spatzen und Vogelbeerbäume, deren Samen durch die Spatzen weitergetragen werden). Dann lautet ein vereinfachtes entsprechendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \alpha x_2(t) \\ x_2'(t) &= \alpha x_1(t) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems lautet für $t \in \mathbb{R}$:

$$x_1(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = c_1 e^{\alpha t} - c_2 e^{-\alpha t} \quad \text{mit Konstanten } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Konstanten ergeben sich wiederum aus den Startpopulationen zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$c_1 = \frac{1}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{2}(x_1(0) - x_2(0)).$$

Unter einem *System zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* versteht man ein System von Gleichungen folgender Form:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a x_1(t) + b x_2(t) \\ x_2'(t) &= c x_1(t) + d x_2(t) \end{aligned}$$

Dabei sind a, b, c, d vorgegebene Zahlen und $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind gesuchte differenzierbare Funktionen in der Variablen $t \in \mathbb{R}$. Wir können die Koeffizienten zu einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zusammenfassen, und $x_1(t), x_2(t)$ als Komponenten einer vektorwertigen Funktion γ von t auffassen. Damit erhalten wir für das Differentialgleichungssystem folgende kompakte Schreibweise:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \cdot \gamma(t).$$

Das System aus dem Beispiel der zwei voneinander profitierenden Populationen lautet in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Auch das Differentialgleichungssystem des Räuber-Beute-Modells lässt sich in Matrixschreibweise darstellen. Setzen wir nämlich $\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - n_1$ und $\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - n_2$, dann erfüllen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ das folgende lineare Differentialgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1'(t) \\ \tilde{x}_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Die beiden Koeffizientenmatrizen unterscheiden sich nur an einer Stelle durch ein Vorzeichen, und doch haben die entsprechenden Differentialgleichungssysteme völlig verschiedene Lösungen! Wir werden gleich sehen, dass die Gestalt der Lösungen davon abhängt, welche Normalform die Koeffizientenmatrix hat.

Besonders einfach ist die Situation, wenn die Koeffizientenmatrix diagonalisierbar ist. Dann kann man nämlich durch einen Basiswechsel erreichen, dass die Gleichungen "entkoppelt" werden. Die entsprechende Aussage soll hier gleich in allgemeinerer Form für n miteinander gekoppelte Funktionen angegeben werden. Ein *System aus n gekoppelten linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten* ist ein Gleichungssystem der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\
x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)
\end{aligned}$$

Dabei sind $x_j(t)$ differenzierbare Funktionen in einer Variablen (zum Beispiel sich gegenseitig beeinflussende Konzentrationen von Substanzen), und a_{ij} sind Zahlen. Wiederum können wir die Koeffizienten des Systems zu einer Matrix A (diesmal einer $n \times n$-Matrix) zusammenfassen und das System in kompakterer Form schreiben:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = A \cdot \gamma(t)\,.$$

Die Menge der Lösungen γ eines vorgegebenen Systems bildet einen linearen Unterraum im Vektorraum aller vektorwertigen Funktionen, und zwar kann man zeigen, dass die Lösungsmenge stets die Dimension n hat. Es gibt also n freie Parameter, die durch die Anfangswerte festgelegt werden können.

2.44 Beispiel Ist A eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann lautet das entsprechende Differentialgleichungssystem

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = A\gamma(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1(t) \\ \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Das System besteht also in diesem Fall eigentlich aus n entkoppelten Differentialgleichungen der Form $x_j'(t) = \lambda_j x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ mit den Lösungen $x_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Ist die Koeffizientenmatrix A diagonalisierbar, so können wir sie durch einen Basiswechsel in Diagonalgestalt überführen. Führt man dies aus, erhält man folgendes Resultat.

2.45 SATZ *Ist A diagonalisierbar mit linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dann lautet die allgemeine Lösung des Systems $\gamma'(t) = A\gamma(t)$ folgendermassen:*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + e^{\lambda_n t} v_n \,.$$

Hier sind $c_1, c_2, \ldots, c_n$ frei wählbare Konstanten.

Beweis. Durch den Wechsel auf die Basis $\mathcal{B}$, gebildet aus den Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$, geht die Matrix A in Diagonalform über. Genauer gilt folgendes: die lineare Abbildung, die bezogen auf die kanonische Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ durch Multiplikation mit A beschrieben ist, wird bezogen auf die Basis $\mathcal{B}$ durch Multiplikation mit der Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ beschrieben. Das heisst, die Koordinaten $\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)$ des Vektors $\gamma(t)$, ausgedrückt in der Basis $\mathcal{B}$, erfüllen das entkoppelte Differentialgleichungssystem $\tilde{x}_j'(t) = \lambda_j \tilde{x}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Also gilt $\tilde{x}_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}$, wobei $c_1, \ldots, c_n$ Konstanten sind. Dies ist gerade die Behauptung. q.e.d.

2.46 BEISPIEL Schauen wir uns zunächst das in der Einführung angegebene Beispiel von zwei voneinander profitierenden Populationen nochmals an. Hier lautet die Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\pm\alpha$, der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu $\lambda_1 = \alpha$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu $\lambda_2 = -\alpha$. Entsprechend lautet die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \\ c_1 e^{\alpha t} - c_2 e^{-\alpha t} \end{pmatrix} ,$$

wie bereits angegeben.

2.47 BEISPIEL Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

Dann ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Für diese Matrix sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 5$ bzw. $\lambda_2 = 2$ von A. Die allgemeine Lösung lautet daher

$$\gamma(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + 2c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_2 e^{2t} \end{pmatrix} .$$

Nehmen wir nun an, A sei eine reelle 2×2-Matrix mit komplex konjugierten Eigenwerten $s \pm it$ (wobei $t > 0$ ist). Dann können wir analog zum eben beschriebenen Vorgehen Eigenvektoren über den komplexen Zahlen berechnen, daraus die komplexen Lösungen des Differentialgleichungssystems bilden und schliesslich zum Real- bzw. Imaginärteil übergehen, um reelle Lösungen zu erhalten. Wir wenden dies Verfahren jetzt auf das in der Einleitung angegebene Räuber-Beute-Modell an.

2.48 Beispiel Das Modell liess sich zurückführen auf das System zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat die komplexen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $i\alpha$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $-i\alpha$. Die komplexe Lösung des Differentialgleichungssystems lautet also

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \tilde{c}_1 e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \tilde{c}_2 e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} .$$

Aus dem Real- und dem Imaginärteil lassen sich folgende reelle Lösungen zusammensetzen:

$$\gamma(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(\alpha t) \\ \cos(\alpha t) \end{pmatrix} .$$

Mit $c_1 = c\cos(\omega)$ und $c_2 = -c\sin(\omega)$ wird daraus, wie bereits angegeben:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} c\cos(\alpha t + \omega) \\ -c\sin(\alpha t + \omega) \end{pmatrix} .$$