

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 10

Übung 10-1. Beim Abfüllen von Kartoffeln in 10-kg-Säcke variiert das Einfüllgewicht zwischen 9.750 kg und 10.750 kg. Die Einfüllgewichte sind in diesem Bereich gleichverteilt, Gewichte ausserhalb kommen nicht vor.

- (a) Wie gross ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass beim Beladen eines Lieferwagens mit 146 Säcken das zulässige Ladegewicht von 1500 kg überschritten wird?
- (b) Wieviele Säcke darf man höchstens laden, damit das zulässige Ladegewicht nur mit (approximativer) Wahrscheinlichkeit 1% überschritten wird?

Tipp. Die Gewichte der einzelnen Säcke können als unabhängig voneinander angenommen werden.

Übung 10-2. (a) Berechne mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$

Tipp. Verwende folgendes Resultat:

Wenn $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$, und $Y \sim \text{Pois}(\mu)$, $\mu > 0$, und X und Y sind unabhängig, dann ist $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$.

(b) Sei $(X_k)_k$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}, & \text{für } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne den (P-f.s.) Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}.$$

Übung 10-3. Eine Zufallsvariable X_ν heisst χ^2 -verteilt mit Freiheitsgrad $\nu \in \mathbb{N}$ (geschrieben $X_\nu \sim \chi_\nu^2$), falls

$$X_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} Z_k^2.$$

wobei $(Z_k)_k$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt ist.

Bemerkung. Das verallgemeinert die χ_1^2 -Verteilung aus dem Skript S. 104/105.

(a) Zeige, dass

$$E[X_\nu] = \nu \quad \text{und} \quad \text{Var}[X_\nu] = 2\nu$$

gilt.

Wahrscheinlichkeit und Statistik

- (b) Gib mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{X_\nu}{\nu} - 1 \right| \leq 0.75 \right].$$

Berechnen Sie die Schranke für $\nu = 12$.

- (c) Berechnen Sie für $\nu = 12$ eine Annäherung für die obige Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Challenge Serie 10. Peter und Paula lesen den gleichen Text unabhängig voneinander. Dabei findet Peter 20 Rechtschreibfehler und Paula nur 15 wobei 10 davon auch Peter gefunden hat. Schätze die Gesamtanzahl Rechtschreibfehler, die weder von Peter noch von Paula gefunden wurden.