ETH Zürich HS 2015 D-INFK
Prof. Dr. P. Embrechts

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 11

Übung 11-1. Bei einer Wiederholung des historischen Experiments von Rutherford unter ähnlichen Bedingungen erhielt man bei 3000 Zeitintervallen die folgenden absoluten Häufigkeiten n_k für die Anzahl der Zeitintervalle, in denen k Zerfälle registriert wurden:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_k	101	317	535	637	568	396	236	120	58	24	6	1	1

Wir nehmen an, dass die zufällige Anzahl der Zerfälle in einem Zeitintervall Poisson-verteilt ist.

(a) Bestimme allgemein den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter λ der Poissonverteilung aufgrund einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ iid $\sim$ Poisson(λ).

(b) Berechne den zugehörigen Schätzwert für die aus der obigen Tabelle folgenden Werte $x_1, \ldots, x_{3000}$.

Übung 11-2. Rutherford (1910) beobachtete die Zerfälle einer radioaktiven Substanz in $N = 2608$ Zeitintervallen von jeweils 7.5 Sekunden Länge. Dabei wurde gezählt, wieviele Teilchen von einem Detektor registriert wurden. Die folgende Tabelle nennt zu jeder Teilchenzahl k die Anzahl N_k von Zeitintervallen, in denen genau k Teilchen registriert wurden. Insgesamt wurden $n = 10097$ Teilchen gemessen.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
N_k	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16
$N \cdot p_k$											

Wenn die Anzahl Zerfälle in 7.5 Sekunden Poisson-verteilt ist, dann sollten nach der frequentistischen Interpretation der Wahrscheinlichkeit $N_k \approx Np_k = Ne^{-\lambda}\lambda^k/k!$ sein. Fülle die dritte Zeile für ein geeignetes λ aus und beurteile, wie gut diese "theoretischen Werte" mit den beobachteten Werten übereinstimmen.

Übung 11-3. Während der Vorbereitungszeit auf die Prüfungssession kommunizieren Arno und Benno per e-Mail, um auftretende Probleme zu bereinigen. Aufgrund der Tageszeiten zu denen Benno Meldungen abschickt, hat Arno den Verdacht, dass Benno mehr arbeitet als er. Aus den Tageszeiten der letzten zehn Meldungen (umgerechnet in Stunden)

$$10.55, 14.9, 11.2, 18.85, 9.75, 11.5, 16.1, 14.4, 9.2, 12.95$$

will Arno Bennos Arbeitszeiten schätzen. Zu diesem Zweck nimmt er an, dass Benno jeden Tag zur Zeit a anfängt zu lernen und zur Zeit b aufhört, und dass die Zeiten, zu denen die e-Mails abgeschickt werden, unabhängig und alle uniform-verteilt sind auf dem Intervall $[a, b]$. Schätze die Parameter a und b mit

(a) der Maximum-Likelihood-Methode,
(**Vorsicht:** Die Likelihood-Funktion ist nicht differenzierbar. Das Maximum der Likelihood-Funktion muss daher auf eine andere Art bestimmt werden.)

(b) der Momenten-Methode, d.h. finde diejenigen Parameter a und b, für welche der Erwartungswert gleich dem empirischen Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i$ ist, und die Varianz mit $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^2$ übereinstimmt.

Siehe nächste Seite!

Challenge Serie 11. Sie backen heute Schokocookies. Sie fügen N Schokostückchen in den Cookieteig und anschliessend teilen sie (zufällig) den Teig in genau 100 Cookies auf. Wieviele Schokostückchen müssen sie in den Teig geben, damit mit mindestens 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit jeder Cookie mindestens ein Schokostückchen hat?