Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 13

Übung 13-1. Ein Weinhändler behauptet, dass die von ihm gefüllten Weinflaschen mindestens 70 Zentiliter enthalten. Ein skeptischer Konsument will diese Behauptung überprüfen. Deshalb kauft er 12 Weinflaschen und misst ihren Inhalt. Er findet die Werte

$$71,\ 69,\ 67,\ 68,\ 73,\ 72,\ 71,\ 71,\ 68,\ 72,\ 69,\ 72 \quad \text{(in Zentiliter)}.$$

Die Standardabweichung der Abfüllung sei im Voraus bekannt und betrage $\sigma = 1.5$ Zentiliter.

(a) Führen Sie einen z-Test durch. Spezifizieren Sie die Annahmen und geben Sie die Nullhypothese, die Alternative, die Teststatistik sowie den Verwerfungsbereich an. Wie entscheidet der Test auf dem 5%-Signifikanzniveau?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2.Art, falls die Alternative $\mu = 69.5$ zutrifft (unter der Annahme von normalverteilten Beobachtungen).

Übung 13-2. Ein Grossverteiler kauft bei einem regionalen Händler 2 Tonnen Galia-Melonen ein. Der Händler garantiert dem Grossverteiler, dass maximal 4% der Melonen faul seien. Zur Kontrolle entnimmt der Grossverteiler zufällig 50 Melonen um zu untersuchen, ob die Aussage des Händlers stimmt.

(a) Welche Verteilung eignet sich, um die Anzahl fauler Melonen unter den 50 untersuchten Melonen zu beschreiben? Welche Annahmen werden mit diesem Modell implizit gemacht?

(b) Angenommen, unter den 50 Melonen befinden sich 4 faule. Hat der Händler über die Qualität seiner Melonen gemogelt? Formulieren Sie eine geeignete Nullhypothese und eine Alternative. Berechnen Sie für das Signifikanzniveau von 5% den Verwerfungsbereich. Wie entscheidet der Test? Was ist die Interpretation des Ergebnisses?

(c) Wie gross ist die Macht dieses Tests für eine Nullhypothese $\theta = 4\%$ gegen eine Alternative $\theta = 10\%$? Welche Konsequenzen sind daraus zu ziehen?

Um die Rechnungen zu erleichtern, sind unten die kumulativen Verteilungsfunktionen $P_\theta[X \leq k]$ für die Binomialverteilung mit $\theta = 0.04$ bzw. $\theta = 0.1$ und $n = 50$ angegeben.

k	0	1	2	3	4	5	6	...
θ=0.04	0.130	0.400	0.677	0.861	0.951	0.986	0.996	...
θ=0.1	0.005	0.034	0.112	0.250	0.431	0.616	0.770	...

Übung 13-3. Ein Photoapparat wird bezüglich Präzision der Verschlusszeiten untersucht. Bei einer Versuchseinstellung von 8 Millisekunden ergaben sich folgende Werte (in Millisekunden):

Versuchsnummer i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Verschlusszeit x_i	8.55	8.17	7.91	8.71	10.89	8.38	8.24	7.99	7.82

Das Mittel $\bar{x}_9$ der Stichprobe beträgt 8.52, die empirische Stichprobenstandardabweichung ist $s_X = 0.937$.

Kann man anhand dieser Daten sagen, dass die Verschlusszeit sich signifikant von 8 Millisekunden unterscheidet?

(a) Führen Sie einen t-Test auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ durch. Formulieren Sie explizit

Siehe nächste Seite!

- Modellannahmen,
- Nullhypothese,
- Alternative,
- Teststatistik,
- Verwerfungsbereich,

und interpretieren Sie das Testergebnis in Worten.

(b) Wir nehmen nun an, dass wir die wahre Streuung $\sigma = 0.4$ kennen. Was ändert sich gegenüber **a)**? Führen sie nun den Test unter Berücksichtigung dieser Änderungen noch einmal durch.

Übung 13-4. Die durchschnittliche Fahrzeit von Zürich nach Bellinzona mit einem Intercity Zug beträägt 146 Minuten. Mit dem Cisalpino werden die folgenden Zeiten gemessen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
152	145	141	137	145	146	139	147	138

Wir nehmen an, dass diese Werte unabhängige Realisierungen einer normalverteilten Zufallsvariablen X mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 sind.

(a) Berechnen Sie das (zweiseitige) Konfidenzintervall zum Niveau 95% für den wahren Erwartungswert μ. Verwenden sie dieses, um auf dem 5%-Niveau festzustellen, ob die mittelere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercity abweicht.

Bei einem neuen Zug misst man folgende Zeiten:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
150	140	138	137	145	146	139	147	136

Man möchte diese Werte mit denen des Cisalpino vergleichen.

1. Handelt es sich um einen gepaarten oder um einen ungepaarten Vergleich?
2. Führen Sie einen entsprechenden Test auf dem 5%-Niveau durch, um festzustellen, ob einer der beiden Züge (Cisalpino oder der neue) im Mittel schneller ist als der andere.

Kennzahlen: $\overline{x}_9 = 143.33$, $\overline{y}_9 = 142$, $s_X^2 = 24.25$, $s_Y^2 = 25.5$, $s^2 = 24.875$.

Challenge Serie 13. Sie werden von Piraten auf einem Schiff auf hoher See mit verbundenen Augen festgehalten. Vor ihnen ist eine 5 Meter Planke installiert über die sie gehen werden. Mit einem Stock werden sie von den Piraten auf die Planke geschubst, sodass sie sich nun irgendwo auf der Planke befinden. Da sie desorientiert sind, gehen sie immer einen Schritt (Schrittlänge ist 1 Meter) zufällig in eine Richtung; entweder Richtung Haie oder in Richtung Schiff zurück. Wir gehen davon aus, dass wenn sie das Schiff erreichen, sie freigelassen werden. Wenn $x \in \mathbb{N}$ den Abstand (in Meter) vom sicheren Ende bis zu ihnen bezeichnet, berechnen sie die Überlebenswahrscheinlichkeit als Funktion von x.