

# Wahrscheinlichkeit und Statistik

## Serie 2

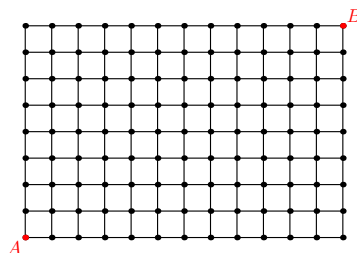
**Übung 2-1.** Im Media Markt sind 30 Computer ausgestellt, 10 Hochleistungscomputer (HC) und 20 durchschnittliche Computer (DC). Dabei haben 60% der HC und 70% der DC den gleichen Tower A (das ist das Gehäuse, das den Rechner umschliesst). Nun wird aus der Gesamtheit der Computer einer zufällig ausgewählt. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$W = \{\text{Der gezogene Computer ist ein DC.}\} \quad B = \{\text{Der gezogene Computer hat den Tower A.}\}.$$

- (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Computer ein HC ist oder einen Tower A besitzt?
- (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogene Computer ein DC ist, falls er keinen Tower A besitzt?

**Übung 2-2.** In dieser Aufgabe geht es hauptsächlich darum Ihre Zähltechniken zu trainieren (siehe dazu Kapitel 10 im Vorlesungsskript).

- (a) In wieviele verschiedene Möglichkeiten lassen sich 33 Personen in 3 Fussballmannschaften à 11 Spieler aufteilen?
- (b)  $k$  Bälle werden zufällig aus einer Box gezogen in der sich  $n$  weisse und  $m$  schwarze Bälle befinden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $r$  Bälle weiss sind?
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl kürzester Wege im unteren Gitter von  $A$  nach  $B$ .



- (d) Sechs verschiedene Farben stehen zur Verfügung um die Seiten eines Würfels zu bemalen. Dabei soll jede Seite eine andere Farbe haben. Bestimmen Sie die Anzahl Möglichkeiten den Würfel anzumalen, wobei zwei Farbkombinationen als *gleich* angesehen werden, wenn sie durch Rotation des Würfels ineinander überführt werden können.

*Tipp.* Reduziere das Problem auf die Verteilung weniger Farben.

**Übung 2-3.** In dieser Aufgabe wollen wir die Inklusion-Exklusionsformel mit endlichem Stichprobenraum  $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  und elementaren Mitteln herleiten und verstehen.

Erinnern wir uns, dass für eine Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  der Ausdruck  $\#A$  für die Anzahl der Elemente in  $A$  steht. Aus dem Skript S. 12 4) kennen wir folgendes Resultat: Für zwei Teilmengen  $A, B \subseteq \Omega$  gilt die Formel:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

## Wahrscheinlichkeit und Statistik

Die Anzahl Elemente von  $A$  die auch in  $B$  drin sind werden mit  $\#A + \#B$  doppelt gezählt, deshalb muss man noch  $\#(A \cap B)$  subtrahieren. Im folgenden wollen wir mit der selben Überlegung die allgemeine Formel herleiten.

- (a) Wir nehmen eine dritte Teilmenge  $C \subseteq \Omega$  hinzu. Leiten Sie die Formel her:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

*Tipp.* Nehmen Sie ein Element  $a$ , dass nur in  $A$  drin ist und verifizieren Sie, dass  $a$  auf der rechten Seite genau einmal gezählt wird. Wiederholen sie den Vorgang mit einem Element  $f$ , dass nur in  $A \cap B$  drin ist und schliesslich mit  $g$ , dass nur in  $A \cap B \cap C$  drin ist.

- (b) Nun der allgemeinen Fall: Seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ . Leiten Sie die Inklusion-Exklusionsformel her:

$$\# \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

*Tipp.* Vergewisseren Sie sich, dass die Anzahl Summanden in der inneren Summe gleich  $\binom{n}{k}$  ist, d.h.  $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1 = \binom{n}{k}$ .

**Challenge Serie 2.** Zehn Streifen Papier mit den Zahlen von 0 bis 9 befinden sich in einem Hut. Fünf werden nacheinander ohne zurücklegen gezogen und in der selben Reihenfolge auf den Tisch gelegt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die so erhaltene Zahl durch 495 teilbar ist?

*Weitere Informationen finden Sie unter*

[www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2015/other/statistik\\_INFK](http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2015/other/statistik_INFK) und  
[www.math.ethz.ch/assistant\\_groups/gr3/praesenz](http://www.math.ethz.ch/assistant_groups/gr3/praesenz).