ETH Zürich HS 2015 D-INFK
Prof. Dr. P. Embrechts

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 3

Übung 3-1. Wir untersuchen die Erfolgswahrscheinlichkeiten bei einer Aufnahmeprüfung an zwei Departementen einer Universität und betrachten folgende Ereignisse:

$$A/A^c = \{\text{“Kandidat ist männlich.”}\}/\{\text{“Kandidat ist weiblich.”}\}$$
$$B/B^c = \{\text{“Kandidat bewirbt sich bei Dep. I.”}\}/\{\text{“Kandidat bewirbt sich bei Dep. II.”}\}$$
$$C/C^c = \{\text{“Kandidat wird aufgenommen.”}\}/\{\text{“Kandidat wird abgelehnt.”}\}$$

Wir nehmen an, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$P[A] = 0.73, \quad P[B|A] = 0.69, \quad P[B|A^c] = 0.24$$

und

$$P[C|A \cap B] = 0.62, \quad P[C|A^c \cap B] = 0.82, \quad P[C|A \cap B^c] = 0.06, \quad P[C|A^c \cap B^c] = 0.07.$$

Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**? **Gib auf dem Lösungsblatt nur 1., 2., oder 3. an.**

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $A \cap B \cap C$ bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $A \cap B^c \cap C$ eintritt ist

- (a) $P[A \cap B \cap C] = 0.312294$ und $P[A \cap B^c \cap C] = 0.013578$.
- (b) $P[A \cap B \cap C] = 0.23578$ und $P[A \cap B^c \cap C] = 0.312294$.
- (c) Es kann keine Aussage gemacht werden.

(b) Was bedeuten $P[C|A \cap B] = 0.62$ und $P[C|A^c \cap B^c] = 0.06$ in Worten?

- (a) $P[C|A \cap B] = 0.62$ ist die Wahrscheinlichkeit aufgenommen zu werden, unter der Bedingung, dass man männlich ist oder sich bei Departement I beworben hat; hingegen ist $P[C|A^c \cap B^c] = 0.06$ die Wahrscheinlichkeit aufgenommen zu werden, unter der Bedingung, dass man weiblich ist oder sich bei Departement II beworben hat.
- (b) $P[C|A \cap B] = 0.62$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein männlicher Kandidat am Departement II aufgenommen wird; hingegen ist $P[C|A^c \cap B^c] = 0.06$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine weibliche Kandidatin am Departement I aufgenommen wird.
- (c) $P[C|A \cap B] = 0.62$ ist die Wahrscheinlichkeit aufgenommen zu werden, unter der Bedingung, dass man männlich ist und sich bei Departement I beworben hat; hingegen ist $P[C|A^c \cap B^c] = 0.06$ die Wahrscheinlichkeit aufgenommen zu werden, unter der Bedingung, dass man weiblich ist und sich bei Departement II beworben hat.

(c) Für die Wahrscheinlichkeit $P[C|A]$ gilt

- (a) $P[C|A] = 0.4464$.
- (b) Die Wahrscheinlichkeit $P[C|A]$ kann nicht berechnet werden, da $P[C]$ unbekannt ist.
- (c) $P[C|A] = 0.68$.

(d) Für die Wahrscheinlichkeit $P[C|A^c]$ gilt

- (a) $P[C|A^c] = 1 - P[C|A]$.

Siehe nächste Seite!

(b) $P[C|A^c] = 0.25$.

(c) Die Wahrscheinlichkeit $P[C|A^c]$ kann nicht berechnet werden, da $P[C]$ unbekannt ist.

(e) Sind die Ereignisse C und A unabhängig, d.h. gilt $P[C \cap A] = P[C] \cdot P[A]$?

(a) Es sind zu wenig Angaben vorhanden, um die Frage beantworten zu können.

(b) Ja.

(c) Nein.

Übung 3-2. Eine Versicherungsgesellschaft hat zwei Kategorien von AutofahrerInnen unter ihren Versicherten: sichere FahrerInnen mit einer Unfallwahrscheinlichkeit von 0.1 und unsichere FahrerInnen mit einer Unfallwahrscheinlichkeit von 0.5 pro Jahr. Der Anteil der sicheren AutofahrerInnen ist 70%, 30% sind unsicher.

(a) Die Gesellschaft möchte wissen, wie wahrscheinlich es ist, dass eine sichere FahrerIn, resp. ein unsichere FahrerIn die nächsten 5 Jahre unfallfrei fährt. Nehme dabei an, dass die Unfälle während verschiedenen Jahren unabhängig sind und mit konstanten Wahrscheinlichkeiten auftreten. Wie gross sind die beiden Wahrscheinlichkeiten?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine versicherte Person, von der man nicht weiss, zu welcher Kategorie sie gehrt, im nächsten Jahr einen Unfall hat?

(c) Ein Kunde, der seit einem Jahr bei dieser Versicherungsgesellschaft ist, hat in diesem Jahr einen Unfall gehabt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Kunde ein unsicherer Fahrer ist?

(d) Wie gross wird die Prämie für den Kunden von Aufgabe (c), wenn die Gesellschaft die Formel

Prämie = Fr. 400.– × *Wahrscheinlichkeit eines Unfalls im nächsten Jahr für diesen Kunden*

verwendet?

Übung 3-3. Drei Personen A, B, C wurden verdächtigt, mit einer ansteckenden Krankheit infiziert zu sein. Um dies zu überprüfen, wurde jeder Person eine Blutprobe entnommen. Das Ergebnis sollte vorerst nicht bekannt gegeben werden. A erfuhr jedoch, dass sich nur bei einer Person der Verdacht bestätigte, und bat den Arzt, ihm im Vertrauen den Namen einer der Personen B oder C zu nennen, die **gesund** ist. Der Arzt lehnte die Auskunft mit der Begründung ab, dass dadurch die Wahrscheinlichkeit, dass A erkrankt sei, von $\frac{1}{3}$ auf $\frac{1}{2}$ ansteigen würde. Stimmt diese Aussage des Arztes?
Um dies zu beantworten, nehme an, dass der Arzt die Auskunft an A gäbe und dass er, falls A an der ansteckenden Krankheit leiden sollte, mit gleicher Wahrscheinlichkeit B oder C nennen würde.

(a) Zeichne das dazugehörige Baumdiagramm.

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Arzt den Namen von B nennt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Arzt den Namen von C nennt.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Erkrankung von A nach der Auskunft des Arztes. Was kann man daraus schliessen?

Siehe nächstes Blatt!

Challenge Serie 3. Ein Mann kauft zwei Zündholzschachteln und legt eine in die rechte und die andere in die linke Hosentasche. Jedes Mal, wenn er eine Zigarette anzündet nimmt er zufällig die eine oder die andere Schachtel. Nach einiger Zeit, nimmt der Mann eine Schachtel hervor und bemerkt, dass sie leer ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu diesem Zeitpunkt genau k Zündhölzchen in der anderen Schachtel sind, wenn zu Beginn beide Schachteln genau n Zündhölzchen hatten? Verwenden Sie dann das Resultat um die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n}$$

zu berechnen.