Wahrscheinlichkeit und Statistik

Serie 5

Übung 5-1. Für die Teilaufgaben (a) und (b) betrachten wir zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion $p(x, y) = P[X = x, Y = y]$:

$x\backslash y$	0	100	200
100	0.20	0.10	0.40
250	0.05	0.15	0.10

(a) Berechnen Sie die Gewichtsfunktion $p_X(x) := P[X = x]$.

(b) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

In den Teilaufgaben (c)–(e) betrachten wir folgende Tabelle:

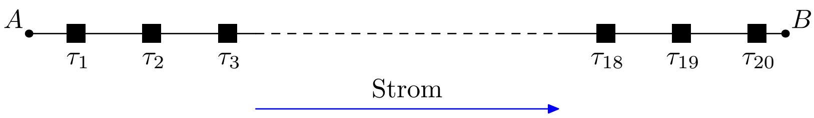
X_i	X_1	X_2	X_3	X_4
$E[X_i]$	2	8	−2	?
$\mathrm{Var}[X_i]$	1	?	5	3

(c) Berechnen Sie $E[X_4]$ falls, der Erwartungswert von $Z_1 = X_1 - 3X_2 + X_4$ gleich -19 ist.

(d) Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X_2]$ falls, die Varianz von $Z_2 = X_1 + 2(X_2 - X_3)$ gleich 29 ist.

(e) Nun nehmen wir zusätzlich an, dass die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_4$ unabhängig sind. Was ist dann $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$?

Übung 5-2. Ein Stromkreis verbindet 20 Transistoren τ_i $i = 1, \ldots, 20$ miteinander. Obwohl der Stromkreis an einer Spannung angeschlossen ist, fliesst kein Strom zwischen A und B, d.h. mindestens ein Transistor ist defekt. Wir nehmen an, dass *genau ein* Transistor mit Wahrscheinlichkeit 5% defekt ist. Wir möchten den defekten Anschluss mit möglichst wenigen Inspektionen ausfindig machen. Dazu steht uns ein Voltmeter zur Verfügung. Unter einer Inspektion verstehen wir das Messen des Stromflusses zwischen zwei Transistoren τ_k und τ_{k+1}.



(a) Bestimme die Verteilung der Anzahl Inspektionen X, wenn man sukzessive jede Segmentgrenze inspiziert. Berechne ferner $E[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$.

(b) Suche eine günstigere Strategie und bestimme dafür wiederum die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl Inspektionen Y.

Übung 5-3. Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Gewichtsfunktion:

$$p(j, k) = P[X = j, Y = k] = \begin{cases} C\left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{für } k = 2, 3, \ldots \text{ und } j = 1, 2, \ldots, k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante C.

(b) Berechnen Sie die Gewichtsfunktionen p_X und p_Y der Randverteilungen von X und Y.

(c) Berechnen Sie die bedingte Gewichtsfunktion $p_{X|Y}(j \mid k) = P[X = j \mid Y = k]$ von X, gegeben dass $Y = k$, sowie die bedingte Gewichtsfunktion $p_{Y|X}(k \mid j) = P[Y = k \mid X = j]$ von Y, gegeben dass $X = j$.

Challenge Serie 5. 100 Passagiere gehen an Board eines SWISS Direktflugzeuges von Zürich nach New York mit genau 100 Sitzplätzen. Jeder Sitzplatz ist reserviert und gehört genau zu einem Ticket. Die ersten 99 Passagiere nehmen zufälllig und gleichmässig verteilt einen Sitzplatz ein. Die letzte Passagier besteht jedoch auf seinen reservierten Sitzplatz. Falls sein Platz besetzt ist, bittet er den (darauf sitzenden) Passagieren den Platz zu wechseln. Dieser Passagier will nun auch seien Platz. Das Spiel wiederholt sich solange bis jeder darauffolgende Passagier seinen Platz erhalten hat. Was ist die erwartete Anzahl Passagiere, die gestört wurden (der erste soll nicht mitgezählt werden).