

Wahrscheinlichkeit und Statistik

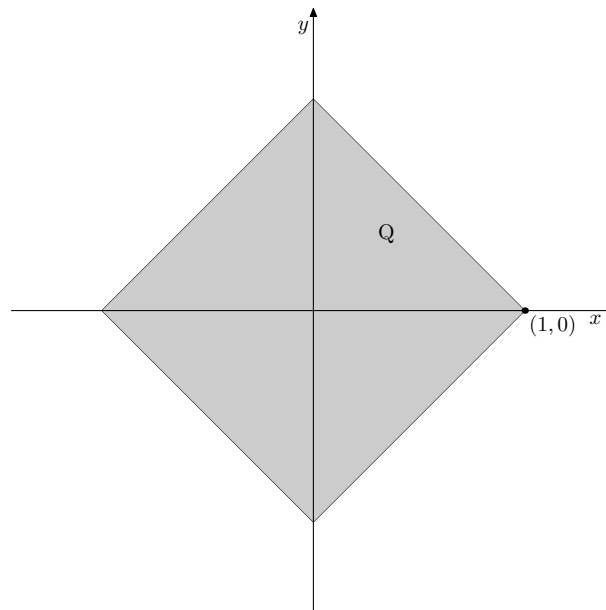
Serie 7

Übung 7-1. Die Zufallsvariable X beschreibe die tägliche Arbeitszeit eines Ingenieurs in Stunden und habe folgende Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} c(x-7)^2, & 7 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimme die Konstante c .
- (b) Berechne die Verteilungsfunktion von X .
- (c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen 8 und 9 Stunden einnimmt.

Übung 7-2. Die Dichte $f(x, y)$ der zwei-dimensionalen Zufallsvariable (X, Y) sei im Quadrat Q konstant und verschwinde ausserhalb von Q .



- (a) Bestimme die gemeinsame Dichte von (X, Y) .
- (b) Bestimme die Randdichten f_X und f_Y der Zufallsvariablen X und Y .
- (c) Berechne $\text{Cov}(X, Y)$.
- (d) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig? (Begründe!)
- (e) Ändert sich die Antwort in (d), wenn das Quadrat Q um 45 Grad gedreht wird?

Übung 7-3. In der Stadt Zürich gibt es bekanntlich viele Baustellen. Die Wartezeit bei einer Baustelle liegt zwischen 0 und 20 Minuten. Die Dichte $f(t)$ der Wartezeit hat ihr Maximum bei $t = 0$ Minuten und nimmt linear auf null ab bei $t = 20$ Minuten.

- (a) Bestimme die Dichtefunktion $f(t)$, die mittlere Wartezeit (Erwartungswert) und die Varianz der Wartezeit.
- (b) Franz ist stolzer Autobesitzer und möchte die Stadt durchqueren. Er kennt einen Weg, bei dem er nur an 10 Baustellen vorbei muss. Welchen mittleren Zeitverlust muss Franz einberechnen? Was kann man über die Varianz des totalen Zeitverlusts aussagen?

Challenge Serie 7. Die Kennnummern von 100 Gefängnisinsassen (jeder hat eine andere) werden in 100 Kisten (je eine Nummer pro Kiste) gelegt und die Kisten werden in einem separaten Raum in einer Reihe aufgestellt. Der Raum besitzt zwei Türen, einen Eingang und einen Ausgang. Nacheinander gehen die Insassen in den Raum und das Ziel ist es seine eigene Kennnummer zu finden. Dabei darf jeder in höchstens 50 Kisten hineinschauen. Wenn er/sie seine Nummer gefunden hat, darf er/sie den Zettel mit seiner Nummer mitnehmen, wenn nicht geht er/sie mit leeren Händen aus dem Raum. Dieser Vorgang wird wiederholt bis alle Insassen dran waren.

Den Insassen wird ermöglicht sich vorher auf eine Suchstrategie zu einigen und wenn sie es schaffen, dass *jeder mit seiner* Kennnummer den Raum verlassen hat, dann kommen alle frei.

Frage: Gibt eine Suchstrategie, sodass die Erfolgswahrscheinlichkeit grösser ist als 30%?

Bemerkung. Falls jeder Insasse seine 50 Kisten zufällig auswählt, dann ist die Erfolgswahrscheinlichkeit $1/2^{100} \approx 8 \cdot 10^{-31}$. Wenn jeder die gleichen 50 Kisten auswählen würde, dann wäre die Wahrscheinlichkeit gleich 0.

Weitere Informationen finden Sie unter

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2015/other/statistik_INFK und
www.math.ethz.ch/assistant_groups/gr3/praesenz.