# Wahrscheinlichkeit und Statistik

## Serie 8

**Übung 8-1.** Gegeben seien zwei Zufallsvariablen $X$ und $Y$ mit endlicher Varianz. Wir möchten gerne für $Y$ *basierend* auf $X$ eine *Prognose* erstellen. Zu diesen Zweck lösen wir das Optimierungsproblem:

$$\text{minimiere} \quad E\left[(Y - aX - b)^2\right] \quad \text{über alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Das entsprechende Minimum $\widehat{Y} := \widehat{a}X + \widehat{b}$ heisst *beste lineare Prognose* von $Y$ gegeben $X$ und $E\left[\left(Y - \widehat{Y}\right)^2\right]$ heisst *(mittlerer quadratischer) Prognosefehler.*

(a) Leite Formeln für $\widehat{a}$ und $\widehat{b}$, und somit auch für $\widehat{Y}$, sowie für den Prognosefehler her.

*Tipp.* Minimiere die quadratische Funktion $(a, b) \mapsto E\left[(Y - aX - b)^2\right]$.

(b) Nehme nun an das Paar $(X, Y)$ sein auf dem Gebiet $\{(x, y) : \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x \leq y^2\}$ gleichverteilt. Basierend auf den Formeln in (a), berechne $\widehat{Y}$ und den Prognosefehler.

**Übung 8-2.** Ein häufig benutztes Modell in der Rückversicherung zur Abdeckung grosser Schäden ist ein sogenannter "Excess-of-Loss" Vertrag. Gegen Bezahlung einer Prämie verpflichtet sich dabei die Rückversicherungsgesellschaft, allfällige Schäden, welche ein bestimmtes Level von $x_0$ CHF übersteigen, zu übernehmen.
Um die Höhe der Prämie zu bestimmen, untersucht die Gesellschaft die Grossschäden (Schäden $> x_0$) des letzten Jahres. In guter Näherung können solche Grossschäden durch eine *Pareto-verteilte* Zufallsvariable $X$ modelliert werden, d.h. für einen Parameter $\alpha > 0$ ist die Verteilungsfunktion von $X$ gegeben durch

$$F_X(x; x_0, \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha}, & x \geq x_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Wie teuer ist ein einzelner Grossschaden im Mittel?

(b) Die Netto-Jahresprämie berechnet sich durch $P_{\text{net}} = E[X]E[N]$. Dabei werde durch $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson-$\lambda$ verteilt) die (zufällige) Anzahl der Grossschäden pro Jahr modelliert. Wie gross ist die Prämie $P_{\text{net}}$ für $\alpha = 2, \ x_0 = 2 \cdot 10^6$ CHF und $\lambda = 3$?

(c) Warum wird in obigem Modell in der Regel $\alpha > 1$ vorausgesetzt?

(d) Ein Zufallszahlengenerator für die uniforme Verteilung auf $[0, 1]$ liefert die folgenden zwei Werte: 0.237, 0.733.
Berechnen Sie daraus zwei Realisierungen einer Pareto-verteilten Zufallsvariable mit $\alpha = 2$ und $x_0 = 2 \cdot 10^6$ CHF.

**Übung 8-3.** Die Chebyshev-Ungleichung liefert eine Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten, auch wenn die genaue Verteilungsfunktion nicht bekannt ist. Es muss nur der (endliche) Erwartungswert $\mu$ und die Varianz $\sigma^2$ einer Zufallsvariablen $X$ bekannt sein, dann gilt für jedes $k > 0$:

$$P[|X - \mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Diese Ungleichung ist bei vielen theoretischen Überlegungen zentral. Da sie aber unter so allgemeinen Bedingungen gültig ist, sind die angegebenen Schranken für die Wahrscheinlichkeit nicht sehr genau. In der Praxis ist sie daher nur dann brauchbar, wenn wirklich keine Zusatzinformationen über die Verteilung erhältlich sind. Dies soll in dieser Aufgabe gezeigt werden.

Die Anzahl Turbinen, die pro Woche in einer Fabrik hergestellt werden, sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 50$ und Varianz $\sigma^2 = 25$.

(a) Angenommen, es ist nichts weiter über die Zufallsvariable bekannt. Was kann man dann über die Wahrscheinlichkeit aussagen, dass in dieser Woche zwischen 40 und 60 Turbinen hergestellt werden?

(b) Nun nehmen wir an, dass zusätzliche Informationen über die Zufallsverteilung erhältlich sind. Dann kann die Wahrscheinlichkeit aus der letzten Teilaufgabe genau berechnet werden und wir sehen, wie gut die Chebyshev-Abschätzung ist. Angenommen, die Zufallsvariable ist $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Woche zwischen 40 und 60 Turbinen hergestellt werden?

**Challenge Serie 8.** Was ist die erwartete Anzahl zufälliger Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$, die wir ziehen müssen damit deren Summe grösser als 1 ist?