Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 13

Lösung 13-1. Für $i = 1, \ldots, n = 12$ sei X_i der Inhalt (in Zentiliter) der i-ten Weinflasche.

(a) Die Modellannahme ist, dass $X_1, \ldots, X_{12}$ unter P_μ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind mit $\sigma = 1.5$ bekannt und μ unbekannt. Wir wollen die Aussage des Weinhändlers, dass die gefüllten Weinflaschen im Mittel mindestens 70 Zentiliter enthalten, überprüfen. Nullhypothese und Alternative lauten daher

$$H_0 : \mu = \mu_0 := 70 \qquad \text{und} \qquad H_A : \mu < \mu_0.$$

Die Teststatistik (des z-Tests) und deren beobachteter Wert lauten

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \text{und} \qquad T(\omega) = \frac{70.25 - 70}{1.5/\sqrt{12}} \approx 0.5774.$$

Unter H_0 gilt $T \sim \mathcal{N}(0,1)$. Der Verwerfungsbereich ist von der Form $K = (-\infty, c]$, und wir wollen, dass $P_{\mu_0}[T \le c] \le 0.05$ gilt. Also wählen wir für c das 5%-Quantil der Standardnormalverteilung, $c = z_{0.05} = -z_{0.95} = -1.645$. Da $0.5774 > -1.645$, wird die Nullhypothese H_0 auf dem 5%-Niveau beibehalten. D.h. wir können dem Weinhändler auf dem 5%-Niveau nicht statistisch eine Lüge nachweisen.

(b) Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2.Art für die Alternative $\mu = \mu_A := 69.5$ ist

$$\begin{aligned}
P_{\mu_A}[T > -1.645] &= P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.645\right] = P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.645\right] \\
&= P_{\mu_A}\left[\frac{\overline{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right] = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - 1.645\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{0.5}{1.5/\sqrt{12}} - 1.645\right) \approx 0.688,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzen, dass $\frac{\overline{X}_n - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}}$ unter P_{μ_A} standardnormalverteilt ist.

Lösung 13-2. (a) Die Binomialverteilung (mit $n = 50$) ist ein geeignetes Modell, um die Daten zu beschreiben. Wir nehmen dabei an, dass die Melonen unabhängig voneinander Fäulnis aufweisen oder nicht. Wir vernachlässigen beispielsweise den Effekt, dass sich bei der Lagerung benachbarte Melonen gegenseitig mit Fäulnis anstecken könnten.

(b) Die Modellannahme ist, dass die Anzahl X fauler Melonen unter P_θ $Bin(n, \theta)$-verteilt ist mit $n = 50$ bekannt und θ unbekannt. Nullhypothese und Alternative lauten

$$H_0 : \theta = \theta_0 := 0.04 \qquad \text{und} \qquad H_A : \theta > \theta_0.$$

Als Teststatistik wählen wir X (vgl. das Beispiel der "tea testing lady" im Skript). Mit Hilfe der Tabelle sieht man, dass gilt:

$$\begin{aligned}
P_{\theta_0}[X \ge 4] &= 1 - P_{\theta_0}[X \le 3] \approx 1 - 0.861 = 0.139 > 0.05, \\
P_{\theta_0}[X \ge 5] &= 1 - P_{\theta_0}[X \le 4] \approx 1 - 0.951 = 0.049 < 0.05.
\end{aligned}$$

Also ist der Verwerfungsbereich $K = \{k : k \ge 5\}$. Da sich nur 4 faule Melonen unter den 50 untersuchten befinden, behalten wir die Nullhypothese bei; wir können auf dem 5%-Niveau also nicht sicher sein, dass der Händler lügt.

(c) Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art für die Alternative $\theta_A = 0.1$ ist $P_{\theta_A}[X < 5] \approx 0.431$. Diese Wahrscheinlichkeit ist sehr hoch, d.h. wir können dem Händler nur schwer eine Lüge nachweisen. Die Macht des Tests für θ_A beträgt $\beta(\theta_A) = 1 - P_{\theta_A}[X < 5] \approx 0.569$. Um die Situation zu verbessern, müsste der Grossverteiler die Stichprobengrösse erhöhen (z.B. 100 Melonen entnehmen).

Lösung 13-3. Für $i = 1, \ldots, 9$ sei X_i die Verschlusszeit (in Millisekunden) im i-ten Versuch.

(a) Wir nehmen an, die X_i, $i = 1, \ldots, 9$ seien unter $P_{(\mu,\sigma^2)}$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt; sowohl μ als auch σ sind hier unbekannte Parameter. Wir wollen testen, ob die Daten mit einem Mittelwert von 8 Millisekunden vereinbar sind. Nullhypothese und Alternative lauten daher

$$H_0 : \mu = \mu_0 := 8, \sigma^2 > 0 \qquad \text{und} \qquad H_A : \mu \neq 8, \sigma^2 > 0.$$

Da σ^2 unbekannt ist, verwenden wir den t-Test und damit die Teststatistik $T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{S_X/\sqrt{n}}$, wobei $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ die empirische Stichprobenvarianz ist. Unter H_0 ist T t-verteilt mit 8 Freiheitsgraden, und der Verwerfungsbereich zum Signifikanzniveau 5% lautet $K = \{t : |t| \geq t_{8,0.975}\} = \{t : |t| \geq 2.31\}$. Der beobachtete Wert der Teststatistik, $T(\omega) = \frac{\overline{x}_9 - \mu_0}{s_X/\sqrt{n}} = \frac{8.52-8}{0.937/\sqrt{9}} \approx 1.66$, liegt nicht im Verwerfungsbereich K, d.h. mit diesen Daten kann (zumindest mit dem t-Test) auf dem 5%-Niveau keine signifikante Abweichung der Verschlusszeit von der Einstellung nachgewiesen werden.

(b) $\sigma = 0.4$ ist nun bekannt, d.h.

$$H_0 : \mu = \mu_0 := 8 \qquad \text{und} \qquad H_A : \mu \neq 8,$$

und wir können den z-Test durchführen. Die Teststatistik $T' = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ist nun standardnormalverteilt unter H_0 und der beobachtete Wert der Teststatistik lautet

$$T'(\omega) = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{8.52 - 8}{0.4/\sqrt{9}} \approx 3.9.$$

Der Verwerfungsbereich auf dem 5%-Niveau ist gegeben durch $K' = \{t : |t| \geq z_{0.975} \approx 1.96\}$ (statt $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ benutzen wir also das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ der Standardnormalverteilung). Der beobachtete Wert der Teststatistik liegt also deutlich im Verwerfungsbereich. Die Nullhypothese wird somit abgelehnt.
Bemerkung: Der Unterschied zur Teilaufgabe **a)** wird dadurch erklärt, dass die empirische Streuung $s_X = 0.937$ viel höher ist als die theoretische Streuung $\sigma = 0.4$.

Lösung 13-4. (a) Die Realisierung des Konfidenzintervalls zum Niveau 95% (vgl. Skript S. 154) ergibt sich zu

$$\begin{aligned} I_{95\%} &= \left[\overline{x}_9 - \frac{s_X}{\sqrt{9}} t_{8,0.975}, \overline{x}_9 + \frac{s_X}{\sqrt{9}} t_{8,0.975}\right] \\ &= \left[143.33 - \frac{\sqrt{24.25}}{\sqrt{9}} 2.306, 143.33 + \frac{\sqrt{24.25}}{\sqrt{9}} 2.306\right] \\ &\approx [143.33 - 3.77, 143.33 + 3.77] \\ &= [139.56, 147.10]. \end{aligned}$$

Um zu testen, ob die mittelere Fahrzeit des Cisalpino von jener des Intercitys abweicht, betrachten wir die Nullhypothese und Alternative

$$H_0 : \mu = \mu_0 := 146 \qquad \text{und} \qquad H_A : \mu \neq \mu_0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Da es sich um einen zweiseitigen Test handelt, können wir auch das Vertrauensintervall $I_{95\%}$ verwenden um einen Testentscheid zu erhalten (vgl. Skript S. 156): wegen $\mu_0 \in I_{95\%}$ kann H_0 nicht verworfen werden. Es lässt sich also auf dem 5%-Niveau statistisch nicht nachweisen, dass einer der beiden Züge schneller ist.

(b) Die Stichproben sind ungepaart. Wir haben keine Informationen darüber, wie die Stichproben entstanden sind. Eine Paarung beispielsweise nach Reihenfolge oder Grösse kann nicht begründet werden.

(c) Wie in **a)** nehmen wir, dass die gegebenen Werte $x_1, \ldots, x_9$ unabhängige Realisierungen einer normalverteilten Zufallsvariablen X mit unbekanntem Mittelwert μ_X und unbekannter Varianz σ^2 sind. Ebenso nehmen wir an, dass die gegebenen Werte $y_1, \ldots, y_9$ unabhängige Realisierungen einer normalverteilten Zufallsvariablen Y mit unbekanntem Mittelwert μ_Y und derselben unbekannten Varianz σ^2 sind. Wir wollen die beiden unbekannten Mittelwerte μ_X und μ_Y vergleichen, bei unbekannter Streuung σ. Da die Stichproben ungepaart sind und die Streuung σ unbekannt ist, werden wir einen ungepaarten Zweistichproben-t-Test durchführen. Nullhypothese und Alternative lauten

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y, \sigma^2 > 0 \qquad \text{und} \qquad H_A : \mu_X \neq \mu_Y, \sigma^2 > 0.$$

Die Teststatistik (vgl. Skript S. 151)

$$T = \frac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_n) - (\mu_X - \mu_Y)}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}$$

ist unter der Nullhypothese t-verteilt mit $n + n - 2 = 18$ Freiheitsgraden. Der Verwerfungsbereich zum 5%-Niveau ist somit

$$K = (-\infty, -t_{16,0.975}] \cup [t_{16,0.975}, \infty) \approx (-\infty, -2.12] \cup [2.12, \infty).$$

Die Realisierung der Teststatistik ist

$$T(\omega) = \frac{\overline{x}_9 - \overline{y}_9}{s\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}} = \frac{143.33 - 142}{\sqrt{24.875}\sqrt{\frac{2}{9}}} \approx 0.54 \notin K.$$

Die Nullhypothese kann somit nicht verworfen werden, d.h. auf dem 5%-Niveau kann nicht statistisch nachgewiesen werden, dass die Züge unterschiedlich schnell sind.

Lösung Challenge Serie 13. Zuerst machen wir die offensichtliche Annahme, dass die Schritte uniform verteilt sind auf ± 1, d.h. Wahrscheinlichkeit einen Schritt nach vorne (wo die Haie sind) zu machen ist $\frac{1}{2}$. Wir bezeichnen mit $P(x)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit, wenn sie vom Startpunkt $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Es gilt $E(0) = 1$ und $E(5) = 0$. Für $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt

$$E(x) = \frac{1}{2}E(x-1) + \frac{1}{2}E(x+1).$$

Setzen wir nacheinander $x = 1, 2, 3, 4$ ein, so erhalten wir ein Gleichungssystem mit Lösungen

$$E(1) = \frac{4}{5}, \quad E(2) = \frac{3}{5}, \quad E(3) = \frac{2}{5}, \quad E(4) = \frac{1}{5}.$$