ETH Zürich HS 2015 D-INFK
Prof. Dr. P. Embrechts

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 2

Lösung 2-1. (a) Wir berechnen $P[W^c \cup B]$ auf zwei Arten:

(a) Wir betrachten folgende Tabelle:

Anzahl	W	W^c
B	14	6
B^c	6	4

Von insgesamt 20 DC haben 70% einen Tower A, also erhalten wir, dass 14 DC einen Tower A. Somit haben 6 ($= 20 - 14$) DC keinen Tower A haben. Da 60% der HC haben einen Tower A, erhalten wir die Zahl 6 (in der Tabelle der Eintrag bei W^c und B). Also haben 4 HC keinen Tower A. Da wir uns für das Ereignis $W^c \cup B$ interessieren, erhalten wir mithilfe der obigen Tabelle

$$P[W^c \cup B] = \frac{\#(W^c \cup B)}{\#\Omega} = \frac{14+6+4}{14+6+6+4} = \frac{4}{5}.$$

(b) Es gilt $P(W^c \cup B) = P(W^c) + P(B) - P(W^c \cap B)$. Dabei ist

- $P(W^c) = 1 - P(W) = \frac{1}{3}$,
- $P(W^c \cap B) = P(B|W^c)P(W^c) = 0.6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$.
- nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|W)P(W) + P(B|W^c)P(W^c) \\ &= 0.7 \cdot \frac{2}{3} + 0.6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Insgesamt also $P(W^c \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

(b) Wir berechen $P(W|B^c)$ auf zwei Arten:

(a) Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(W|B^c) = \frac{P(W \cap B^c)}{P(B^c)}.$$

Aus der Tabelle lesen wir, dass das Ereigins $W \cap B^c$ sechs Computer und dass das Ereignis B^c zehn Computer enthält. Somit erhalten wir

$$P(W|B^c) = \frac{P(W \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

(b) Alternativ kann man $P(W|B^c)$ auch so berechnen:

$$\begin{aligned} P(W|B^c) &= \frac{P(W \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(B^c|W)P(W)}{P(B^c)} \\ &= \frac{(1 - P(B|W))\,P(W)}{1 - P(B)} = \frac{(1-0.7)\cdot\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Siehe nächste Seite!

Lösung 2-2. (a) Insgesamt gibt es 33! Möglichkeiten die 33 Personen (in einer Reihe) anzuordnen. Wenn man sie in drei Gruppen (à 11) unterteilt, muss berücksichtigt werden, dass die jeweilige Gruppe jeweils dieselbe bleibt wenn man die 11 untereinander permutiert. Das heisst wir haben nur noch $\frac{33!}{(11!)^3}$. Es bleibt noch zu beachten, dass die Permutation drei Mannschaften (also 3!) auch noch herausdividiert werden muss. Insgesamt erhalten wir $\frac{33!}{3!(11!)^3} = 22'754'499'243'840$ Möglichkeiten.

(b) Als zugrunde liegendes Modell wählen wir das Laplace Modell. Die Anzahl Möglichkeiten $n+m$ Bälle auf k Ziehungen ist gleich $\binom{n+m}{k}$. Die Anzahl Möglichkeiten in diesen k Ziehungen genau r weisse Bälle zu ziehen ist $\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$. Also erhalten wir, dass die Wahrscheinlichkeit gleich ist mit

$$P[\{\text{bei } k \text{ Ziehungen sind } r \text{ weiss}\}] = \frac{\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k}}.$$

(c) Kürzeste Wege von A nach B entsprechen genau $12 + 8 = 20$ Bewegungen. Ein kürzester Weg ist dadurch charakterisiert, dass genau 12 Rechts- und 8 Aufwärtsbewegungen gemacht werden. Um zu zählen wieviele das sind, stellen wir uns die 20 Bewegungen als einen Vektor vor:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{20}) \quad \text{wobei } x_k \in \{0, 1\}.$$

Dabei soll der Eintrag “1” an der k-ten Stelle heissen, dass eine Aufwärtsbewegung im k-ten Schritt gemacht worden ist und der Eintrag “0” heisst Rechtsbewegung. Das bedeuted, dass die Anzahl kürzester Wege gleich ist mit $\binom{20}{8} = 125'970$.

(d) Terminologie: Eine mögliche Färbung des Würfels nennen wir *Konfiguration*.

Nehmen wir an, dass die sechs Farben seien Gelb, Blau, Rot, Grün, Weiss und Schwarz. Da wir nur bis auf Rotation zählen, können wir bei jeder Konfiguration den Würfel so drehen, dass die grüne Seite auf dem Boden ist. D.h. wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Bodenseite immer grün ist. Für die Deckenseite bleiben fünf verschiedene Farben zur Verfügung und je zwei verschiedene Deckenfarben lassen sich nicht durch Rotation ineinander überführen. Das bedeuted, dass wenn wir die Anzahl Färbungen π bestimmen können, bei deren die Bodenfläche grün und die Deckenfläche, sagen wir, blau ist, dann ist die Gesamtanzahl an Möglichkeiten gleich $5 \cdot \pi$. Denken wir uns nun zusätzlich die Deckenfläche als Blau.

Wähle eine der restlichen Farben, z.B. rot, und platziere sie als Rückenseite des Würfels (das kann man immer machen mit Rotation). Jetzt gibt es drei Farben, die übrig bleiben (Gelb, Schwarz und Weiss) mit denen wir die restlichen drei Seiten bemalen müssen. Das sind genau $3! = 6(= \pi)$ Konfigurationen. Das bedeuted, dass es insgesamt $5 \cdot 6 = 30$ Konfigurationen gibt, die nicht durch Rotation ineinander überführt werden können.

Lösung 2-3. (a) Sei $e \in A \cap B^c \cap C^c$, also ein Element, dass nur in A liegt. Dann wird e im Audruck

$$\#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \tag{1}$$

genau einmal gezählt, nämlich in $\#A$. Nehme nun $f \in A \cap B \cap C^c$, also ein Element, dass nur in $A \cap B$ liegt. Dann wird f in den Ausdrücken

$$\#A, \quad \#B \quad \text{positiv und in} \quad \#(A \cap B) \quad \text{negativ gezählt.}$$

Also wird f total in der Formel (1) $1 + 1 - 1 = 1$ Mal gezählt. Nehme schliesslich ein Element $g \in A \cap B \cap C$, dass in allen Mengen drin ist. Dann wird g in (1) $1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 1$

Siehe nächstes Blatt!

Mal gezählt. Insgesamt erhalten wir, dass jedes der Elemente in A durch (1) genau ein Mal gezählt wird. Durch vertauschen der Rollen A mit B resp. C schlussfolgern wir, dass die Formel (1) tatsächlich mit $\#(A \cup B \cup C)$ übereinstimmt.

(b) Der allgemeine Fall kann in der gleichen Art gelöst werden wie die vorherige Aufgabe. Wir müssen zeigen, dass der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \tag{2}$$

jedes Element in $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ genau einmal zählt. Dazu bemerken wir als erstes, dass die innere Summe in (2) genau $\binom{n}{k}$ Summanden besitzt, weil es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt k verschiedene natürliche Zahlen $j_1, \ldots, j_k$ zwischen 1 und n zu wählen.

Nehmen wir an, dass e in genau ℓ der Mengen $A_1, \ldots A_n$ enthalten ist. Formal bedeuted das, dass $e \in (A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_\ell}) \cap \left(\bigcup_i A_i\right)^c$, wobei die Vereinigung $\bigcup_i$ über alle Indizes geht ausser eben diese $j_1, \ldots, j_\ell$. Wir möchten herausfinden wieviel mal die Formel (2) das Element e zählt. Dazu berechnen wir jeden einzelnen Summanden in (2).
Im ersten Schritt beginnen wir mit dem ersten Summanden, also $k = 1$. Dieser ist gleich

$$(-1)^{1+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq n} \#\left(A_{i_1}\right) = \#A_1 + \#A_2 + \cdots + \#A_n.$$

Nach Annahme zählen wir e mit $\#A_{j_1} + \#A_{j_2} + \cdots + \#A_{j_\ell}$, also $\binom{\ell}{1} = \ell$-Mal. Im zweiten Schritt ist $k = 2$ und der Summand ist gleich

$$(-1)^{2+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) = - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right).$$

Von diesen $\binom{n}{2}$-Summanden sind genau $\binom{\ell}{2}$ gleich 1 und alle anderen gleich 0. D.h. wir subtrahieren die Zahl $\binom{\ell}{2}$. Im j-ten Schritt ist $k = j$ und der Summand ist gleich

$$(-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right).$$

Unter diesen $\binom{n}{j}$ Summanden sind genau $\binom{\ell}{j}$ gleich 1 und alle anderen gleich 0. D.h. wir addieren die Zahl $(-1)^{j+1}\binom{\ell}{j}$. Summieren wir nun alle Summanden auf, so erhalten wir, dass (2) das Element e genau

$$\sum_{j=1}^{\ell}(-1)^{j+1}\binom{\ell}{j}$$

Mal zählt. Wir wollen nun diesen Ausdruck ausrechnen. Unter Verwendung der binomischen Formel

$$(a+b)^{\ell} = \sum_{j=0}^{\ell}\binom{\ell}{j} a^{\ell-j} b^j,$$

erhalten wir mit $a = 1$ und $b = -1$, die Formel

$$\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^j\binom{\ell}{j} = 0.$$

Siehe nächste Seite!

Kombinieren wir dies und beachten wir, dass $\binom{\ell}{0} = 1$, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j+1} \binom{\ell}{j} = \binom{\ell}{0} + \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j+1} \binom{\ell}{j} = 1.$$

Also zählt die Formel e genau einmal. Da nun ℓ beliebig war, haben wir gezeigt, dass die Formel (2) der Anzahl Elemente in $\bigcup_j A_j$ gleich ist.

Lösung Challenge Serie 2. Es ist klar, dass die Anzahl möglicher Ausgänge gleich ist mit $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 (= 30'240)$. Wir müssen jetzt nur noch die Zahlen zählen, die durch $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$ teilbar sind. Nehmen wir an, dass die gezogenen Zahlen gleich sind mit a, b, c, d und e. Dann ist die auf dem Tisch liegende Zahl gleich mit

$$N = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e.$$

Die Zahl N ist genau dann durch 495 teilbar, wenn sie gleichzeitig durch 5, 9 und 11 teilbar ist. Da

$$N - e = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10$$

immer durch 5 teilbar ist, ist N genau dann durch 5 teilbar, wenn e es ist. Das geht nur wenn $e = 0$ oder $e = 5$.
Mit Hilfe der Zerlegung

$$N = (9'999 \cdot a + 999 \cdot b + 99 \cdot c + 9 \cdot d) + (a + b + c + d + e)\,,$$

ist N genau dann durch 9 teilbar, wenn es seine Quersumme $q := a + b + c + d + e$ ist (dieses Resultat sollte aus der Mittelschule schon bekannt sein!).
Schliesslich, mit einem analogen Trick, sehen wir, dass

$$N = (9'999 \cdot a + 1001 \cdot b + 99 \cdot c + 11 \cdot d) + (a - b + c - d + e)\,,$$

und somit, da $9'999 \cdot a + 1001 \cdot b + 99 \cdot c + 11 \cdot d = 11\,(909 \cdot a + 91 \cdot b + 9 \cdot c + d)$, ist N genau dann durch 11 teilbar, wenn es die alternierende Summe $q_a := a - b + c - d + e$ ist (dieses Resultat könnte aus der Mittelschule schon bekannt sein).
Als nächstes gilt

$$q = a + b + c + d + e \geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad \text{(kleinste mögliche Zahl)}$$

und

$$q = a + b + c + d + e \leq 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35 \quad \text{(grösste mögliche Zahl).}$$

Die einzigen Zahlen zwischen 10 und 35, die durch 9 teilbar sind, sind 18 und 27. Wir unterscheiden nun die zwei Fälle $q = 18$ und $q = 27$:

Fall $q = 18$: Die alternierende Summe q_a ist gerade, weil

$$q_a = 18 - 2b - 2d \quad \text{und} \quad |q_a| < 18. \tag{3}$$

Das heisst, dass $q_a = 0$, denn 0 ist das einzige Vielfache von 11 bis 18. Also muss

$$a + c + e = b + d = 9$$

gelten (die 9 kommt von (3)).

Siehe nächstes Blatt!

Unterfall $e = 0$. Falls $e = 0$, dann ist $a + c = b + d = 9$. Es gibt allerdings genau 8 Paare (a, c) und (b, d), die diese Gleichungen erfüllen:

$$(1, 8) \quad (2, 7) \quad (3, 6) \quad (4, 5) \quad (5, 4) \quad \ldots \quad (8, 1).$$

Sobald ein Paar, z.B (a, c), gewählt ist, sind nur noch 6 Möglichkeiten für die Wahl von (b, d) vorhanden, da (b, d) nicht mit (a, c) oder (c, a) gleich sein kann (ohne Zurücklegen!). Also erhalten wir im Fall $(e = 0)$ insgesamt $8 \cdot 6 = 48$ Möglichkeiten.

Unterfall $e = 5$. Falls $e = 5$, dann ist $a + c = 4$ und $b + d = 9$. Das heisst, dass (a, c) von der Form

$$(0, 4), \quad (4, 0), \quad (1, 3), \quad (3, 1)$$

sein muss. In den ersten beiden Fällen kann (b, d) gleich sein mit

$$(1, 8) \quad (2, 7) \quad (3, 6) \quad (6, 3) \quad (7, 2) \quad (8, 1).$$

In den zweiten beiden Fällen kann (b, d) allerdings nur gleich sein mit

$$(9, 0) \quad (2, 7) \quad (7, 2) \quad (0, 9).$$

Wir erhalten somit insgesamt $2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten. Zusammengefasst ergeben sich

$$\{\text{Möglichkeiten } q = 18 \text{ und } e = 0\} + \{\text{Möglichkeiten } q = 18 \text{ und } e = 5\} = 48 + 20 = 68.$$

Fall $q = 27$**:** In diesem Fall erhalten wir, dass $q_a = 27 - 2b - 2d$ und somit, dass q_a ungerade ist. Darüber hinaus gilt, dass

$$27 > q_a > 27 - 2 \cdot 9 - 2 \cdot 8 = -7.$$

Also muss $q_a = 11$ sein, da es keine weiteren ungeraden Vielfache von 11 in diesem Bereich gibt. Dies impliziert, dass

$$b + d = 8 \quad \text{und} \quad a + c + e = 19.$$

Den Fall $e = 0$ können wir sofort ausschliessen, da $9 + 8 < 19$. Das heisst, wir können direkt mit der Annahme $e = 5$ fortfahren. Daraus ergibt sich $a + c = 14$, was nur bei $(a, c) = (6, 8)$ oder $(8, 6)$ passieren kann. Da bleiben für das Paar (b, d) nur noch $(1, 7)$ und $(7, 1)$. Wir erhalten damit, dass

$$\text{Möglichkeiten } q = 27 \text{ und } e = 0 + \text{Möglichkeiten } q = 27 \text{ und } e = 5 = 0 + 2 \cdot 2 = 4 \text{ Möglichkeiten.}$$

Also erhalten wir also, dass es genau

$$\{q = 18 \text{ und } e = 0\} + \{q = 27 \text{ und } e = 5\} + \{q = 18 \text{ und } e = 5\} = 72.$$

Zahlen gibt, die durch 495 teilbar sind. Dividieren wir durch die gesamte Anzahl möglicher Zustände $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30'240$, erhalten wir, dass

$$P[\{\text{gezogene Zahl ist durch 495 teilbar}\}] = \frac{74}{30'240} \approx 0.25\%.$$