Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 3

Lösung 3-1. (a) 1. ist richtig, denn

$$\begin{aligned}P[A\cap B\cap C] &= P[A]\cdot P[B|A]\cdot P[C|A\cap B]\\ &= 0.73\cdot 0.69\cdot 0.62\\ &= 0.312294.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}P[A\cap B^c\cap C] &= P[A]\cdot P[B^c|A]\cdot P[C|A\cap B^c]\\ &= 0.73\cdot 0.31\cdot 0.06\\ &= 0.013578.\end{aligned}$$

(b) 3. ist richtig. Dies ist genau die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

(c) 1. ist die richtige Antwort, da

$$\begin{aligned}P[C|A] &= \frac{P[C\cap A]}{P[A]}\\ &= \frac{P[A\cap B\cap C]+P[A\cap B^c\cap C]}{P[A]}\\ &= \frac{0.73\cdot 0.69\cdot 0.62+0.73\cdot 0.31\cdot 0.06}{0.73}\\ &= 0.4464.\end{aligned}$$

(d) 2. ist richtig, weil

$$\begin{aligned}P[C|A^c] &= \frac{P[C\cap A^c]}{P[A^c]}\\ &= \frac{P[A^c\cap B\cap C]+P[A^c\cap B^c\cap C]}{P[A^c]}\\ &= \frac{0.82\cdot 0.27\cdot 0.24+0.07\cdot 0.27\cdot 0.76}{0.27}\\ &= 0.25.\end{aligned}$$

(e) 3. ist richtig, da $P[C\cap A]\neq P[C]\cdot P[A]$. Um das zu sehen, berechnen wir

$$\begin{aligned}P[C] &= P[C\cap A]+P[C\cap A^c]\\ &= P[A\cap B\cap C]+P[A\cap B^c\cap C]+P[A^c\cap B\cap C]+P[A^c\cap B^c\cap C]\\ &\underbrace{=}_{a)} 0.73\cdot 0.69\cdot 0.62+0.73\cdot 0.31\cdot 0.06+0.27\cdot 0.24\cdot 0.82+0.27\cdot 0.76\cdot 0.07\\ &= 0.393372.\end{aligned}$$

Somit ist $P[C]\cdot P[A]=0.393372\cdot 0.73\approx 0.2872$. Hingegen gilt für $P[C\cap A]$:

$$P[C\cap A]\underbrace{=}_{c)}P[C|A]\cdot P[A]=0.4464\cdot 0.73=0.325782\neq 0.2872=P[C]\cdot P[A].$$

Siehe nächste Seite!

Lösung 3-2. (a) Wir definieren für die folgenden Teilaufgaben einige Ereignisse:

$$\begin{aligned} A_i &= \{\text{Unfall im Jahr } i\}\,, \quad i \in 1 \ldots 5, \\ S &= \{\text{Der Fahrer fährt sicher}\}\,, \\ US &= \{\text{Der Fahrer fährt unsicher}\}\,. \end{aligned}$$

Dann können wir rechnen:

$$\begin{aligned} P\left[A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c | S\right] &= P\left[A_1^c|S\right] \cdot P\left[A_2^c|S\right] \cdot \ldots \cdot P\left[A_5^c|S\right] \\ &= (1-0.1)^5 = 0.9^5 = 0.59. \\ P\left[A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c | US\right] &= P\left[A_1^c|US\right] \cdot P\left[A_2^c|US\right] \cdot \ldots \cdot P\left[A_5^c|US\right] \\ &= (1-0.5)^5 = 0.5^5 = 0.03. \end{aligned}$$

(b) Wir verwenden den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P\left[A_i\right] &= P\left[A_i \cap S\right] + P\left[A_i \cap US\right] = P\left[A_i|S\right] \cdot P\left[S\right] + P\left[A_i|US\right] \cdot P\left[US\right] \\ &= 0.1 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.3 = \frac{22}{100} = 0.22. \end{aligned}$$

(c) Wir schliessen mit dem Satz von Bayes:

$$P\left[US|A_i\right] = \frac{P\left[A_i|US\right] \cdot P\left[US\right]}{P\left[A_i|S\right] \cdot P\left[S\right] + P\left[A_i|US\right] \cdot P\left[US\right]} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.1 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.3} = \frac{15}{22}.$$

(d)

$$\begin{aligned} P\left[A_{i+1}|A_i\right] &= P\left[A_{i+1} \cap S|A_i\right] + P\left[A_{i+1} \cap US|A_i\right] \\ &= \frac{P\left[A_{i+1} \cap S \cap A_i\right]}{P\left[A_i\right]} + \frac{P\left[A_{i+1} \cap US \cap A_i\right]}{P\left[A_i\right]} \\ &= \frac{P\left[A_{i+1} \cap A_i|S\right] \cdot P\left[S\right]}{P\left[A_i\right]} + \frac{P\left[A_{i+1} \cap A_i|US\right] \cdot P\left[US\right]}{P\left[A_i\right]} \\ &= \frac{P\left[A_{i+1}|S\right] \cdot P\left[A_i|S\right] \cdot P\left[S\right]}{P\left[A_i\right]} + \frac{P\left[A_{i+1}|US\right] \cdot P\left[A_i|US\right] \cdot P\left[US\right]}{P\left[A_i\right]} \\ &= P\left[S|A_i\right] \cdot P\left[A_{i+1}|S\right] + P\left[US|A_i\right] \cdot P\left[A_{i+1}|US\right] \\ &= (1 - P\left[US|A_i\right]) \cdot P\left[A_{i+1}|S\right] + P\left[US|A_i\right] \cdot P\left[A_{i+1}|US\right] \\ &= (1 - \frac{15}{22}) \cdot 0.1 + \frac{15}{22} \cdot 0.5 = 0.373. \end{aligned}$$

Die Prämie beträgt daher $400 \cdot 0.373 = 149.20$ Franken.

Lösung 3-3. (a) Der Einfachheit halber führen wir folgende Notation ein:

- $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ seien die Ereignisse, dass A, B, bzw. C an der ansteckenden Krankheit leiden.
- A^*, B^*, C^* seien die Ereignisse, dass der Arzt A, B, bzw. C nennt.

Da in Wirklichkeit nur eine Person krank ist und wir keine weitere Information haben, gilt:

$$P[\hat{A}] = P[\hat{B}] = P[\hat{C}] = \frac{1}{3}.$$

Siehe nächstes Blatt!

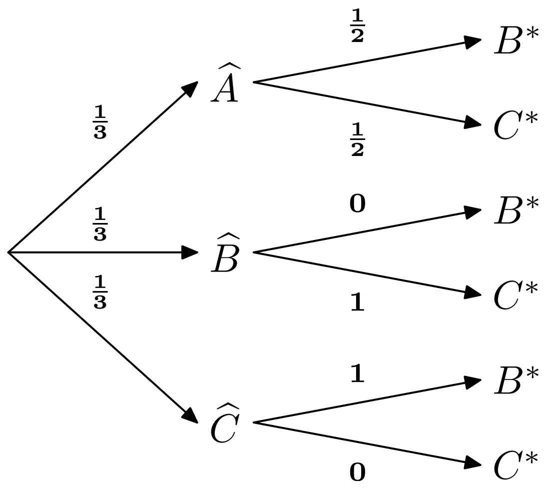
Es gilt:

- $P[B^*|\hat{A}] = \frac{1}{2}$ (nach Annahme)
- $P[B^*|\hat{B}] = 0$ (der Arzt soll eine gesunde Person nennen)
- $P[B^*|\hat{C}] = 1$ (der Arzt soll A eine gesunde Person nennen)

und

- $P[C^*|\hat{A}] = \frac{1}{2}$ (nach Annahme)
- $P[C^*|\hat{B}] = 1$ (der Arzt soll A eine gesunde Person nennen)
- $P[C^*|\hat{C}] = 0$ (der Arzt soll eine gesunde Person nennen)

Nun sieht das Baumdiagramm so aus:



(b) Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P[B^*] = P[B^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}] + P[B^*|\hat{B}] \cdot P[\hat{B}] + P[B^*|\hat{C}] \cdot P[\hat{C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0.5.$$

$$P[C^*] = P[C^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}] + P[C^*|\hat{B}] \cdot P[\hat{B}] + P[C^*|\hat{C}] \cdot P[\hat{C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 = 0.5.$$

(c) Mit Hilfe von Bayes folgt:

$$P[\hat{A}|B^*] = \frac{P[B^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}]}{P[B^*]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$P[\hat{A}|C^*] = \frac{P[C^*|\hat{A}] \cdot P[\hat{A}]}{P[C^*]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Die Aussage des Arztes stimmt nicht: die bedingte Wahrscheinlichkeit bleibt auch nach der Auskunft $\frac{1}{3}$.

Lösung Challenge Serie 3. Wenn am Ende nur noch k übrig sind, dann hat der Mann insgesamt $n + (n - k) = 2n - k$ Zündhölzchen gebraucht. Die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes zu ziehen

Siehe nächste Seite!

ist demnach gleich $\frac{1}{2^{2n-k}}$ und es gibt insgesamt $\binom{2n-k}{n}$ Möglichkeiten dies zu erreichen. Also ist

$$P[\{\text{am Ende bleiben } k \text{ übrig}\}] = \frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n-k}{n}.$$

Es ist klar, dass am Ende nur $k = 0, \dots, n$ Zündhölzchen übrig sein können, sodass

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P[\{\text{am Ende bleiben } k \text{ übrig}\}] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n-k}{n}.$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit 2^{2n} erhalten wir, dass

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n}.$$