Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 4

Lösung 4-1. (a) Der Wertebereich der Zufallsvariable X ist $\mathcal{W}(X) = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Die Gewichtsfunktion $p_X(k) = \frac{1}{6}$ für $k = 1, 2, \ldots, 6$. Also erhalten wir für den Erwartungswert von X

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k p_X(k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + \cdots + 6) = \frac{7}{2}.$$

(b) Für die Verteilungsfunktion von X gilt

$$F_X\Big(\frac{5}{4}\Big) = \sum_{k \text{ mit } x_k \leq \frac{5}{4}} p_X(x_k) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

Hierbei benutzen wir, dass nach Aufgabenstellung $\mathcal{W}(X) \subset \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 1\right\} \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

(c) Wir können $E[X^2]$ hier nicht berechnen, weil p_X durch die Angaben nicht festgelegt ist. Es gilt nämlich

$$P\Big[X = \frac{1}{4}\Big] + P\Big[X = \frac{2}{3}\Big] + P\Big[X = 1\Big] + P\Big[X = \frac{3}{2}\Big] = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} = \frac{29}{40} < 1.$$

Somit können wir $E[X^2]$ nicht berechnen.

(d) Es gilt

$$\sum_{k \text{ mit } x_k \in \mathcal{W}(X)} p_X(x_k) = 1$$

Daraus folgt sofort

$$p_X(8) = 1 - p_X(3) - p_X(5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

(e) Zuerst berechnen wir $E[X]$ und $E[X^2]$:

$$E[X] = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{86}{15}.$$

$$E[X^2] = 3^2 \cdot \frac{1}{3} + 5^2 \cdot \frac{1}{5} + 8^2 \cdot \frac{7}{15} = \frac{568}{15}.$$

Für die Varianz gilt also:

$$\mathrm{Var}[2X + 3] = 4\mathrm{Var}[X] = 4(E[X^2] - E[X]^2) = 4\left(\frac{568}{15} - \left(\frac{86}{15}\right)^2\right) = \frac{4496}{225}.$$

Lösung 4-2. (a) Sei A das Ereignis, dass Anja gewinnt, und B das Ereignis, dass Beatrice gewinnt. Da eine von beiden gewinnen muss, aber nicht beide gleichzeitig gewinnen können, ist

$$P[A] + P[B] = 1. \tag{1}$$

Siehe nächste Seite!

Sei W die Nummer des Wurfes, in dem die erste sechs erscheint. W ist geometrisch verteilt mit Parameter 1/6. Wenn W ungerade ist, gewinnt A, ansonsten gewinnt B. Also ist

$$P[A] = \sum_{n=0}^{\infty} P[W = 2n+1] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{2}\right)^{n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(5/6)^2} = \frac{6}{11}$$

und folglich $P[B] = 1 - P[A] = 5/11$.

(b) Die erwartete Anzahl Würfe W ist

$$E[W] = \sum_{k=1}^{\infty} kP[W = k] = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{36}{6} = 6.$$

Lösung 4-3. (a) Eine Möglichkeit die Funktion *Seq* zu implementieren ist folgende:

```
function y = Seq(p,n)
r = rand(1,n);
y = zeros(1,n);
y(r<p) = 1;
end
```

Ein möglicher Output kann so ausschauen:

```
>> Seq(0.5, 10)
ans = 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1
```

(b) Es gibt verschiedene Möglichkeiten diese Aufgabe zu implementieren, hier ist eine davon:

```
function maxlength = LSeq(p,n)
y = Seq(p,n);
t = diff([false; y.'==1; false]);
p = find(t==1);
q = find(t==-1);
maxlength = max(q-p);
end
```

Ein typischer Output kann so ausschauen:

```
>> LSeq(0.5,200)
ans = 9
```

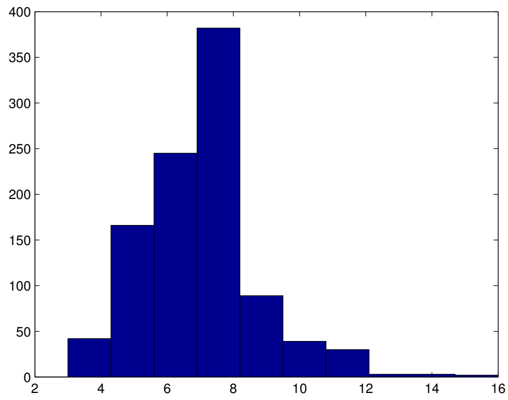
(c) Hier verwenden wir die Funktion *LSeq* um ganz viele Experimente zu simulieren. Dazu verwenden wir z.B. folgendes Program:

```
p = 0.5;
n = 200;
m = 100;
y = LSeq(p,n);
for i = 1:m
y = [y; LSeq(p,n)];
```

Siehe nächstes Blatt!

```
end
hist(y)
```

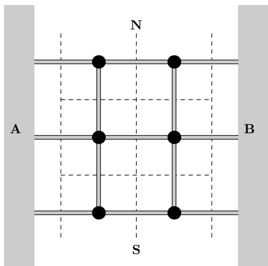
Ein typisches Histogram:



Wir bemerken sofort, dass die Häufigkeit sich um die Werte 6, 7 und 8 konzentriert hat. Setzt man $n = 2^k$ für $k = 6, 7, 8, 9, 10$ so sieht man, dass sich die Häufigkeit um die Werte $6, 7, 8, 9, 10$ herum konzentriert. Wir vermuten also, dass die sich die Zufallsvariable $L^{(n)} \approx \log_2(n)$ für grosse n. Die Wahrscheinlichkeitstheorie bestätigt dieses Resultat sogar präziser. Es gilt nämlich folgendes Resultat:

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \frac{L^{(n)}}{\log_2(n)} = 1\right].$$

Lösung Challenge Serie 4. Nehmen wir an es gäbe einen Schiffskapitän, der von Norden **N** nach Süden **S** kommen will. Wir nehmen weiter an, dass er nur durchfahren kann, wenn ihm keine Brücken im Weg stehen.



Aus Symmetriegründen gilt, dass

$$p := P[\{\text{man kann von } \mathbf{A} \text{ nach } \mathbf{B} \text{ gelangen}\}] = P[\{\text{der Kapitän gelangt von } \mathbf{N} \text{ nach } \mathbf{S}\}] =: q.$$

Desweiteren ist auch klar, dass der Kapitän genau dann durchfahren kann, wenn man nicht von **A** nach **B** kommt. Das bedeuted, dass $p + q = 1$ also $p = 1/2$.

Weitere Informationen finden Sie unter
`www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2015/other/statistik_INFK` **und**
`www.math.ethz.ch/assistant_groups/gr3/praesenz`.