Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 6

Lösung 6-1. Folgende Verteilungen sind sinnvoll:

(a) $X^{(a)}$: Anzahl Ereignisse in einem Zeitintervall: Poissonverteilung.

(b) $X^{(b)}$: Andere stetige Verteilung (die Kindersterblichkeit legt eine Verteilung mit mindestens zwei Maxima nahe.).

(c) $X^{(c)}$: Alle Werte im Rundungsintervall sind gleich wahrscheinlich: Uniforme Verteilung (Gleichverteilung) .

(d) $X^{(d)}$: Poissonverteilung .

(e) $X^{(e)}$: Binomialverteilung .

(f) $X^{(f)}$: Lebensdauer = Wartezeit bis Zerfall des Teilchens: Exponentialverteilung .

(g) $X^{(g)}$: Stetige glockenförmige Verteilung um einen bestimmten Normwert: Normalverteilung (oder eine andere stetige glockenförmige Verteilung) .

(h) $X^{(h)}$: Nadelverlust in % ist beliebig auf dem Intervall $[0, 100]$. verteilt: Andere stetige Verteilung .

(i) $X^{(i)}$: geometrische Verteilung.

(j) $X^{(k)}$: Binomialverteilung.

Lösung 6-2. (a) $P[\text{letzte vier Zahlen gleich}] = 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0.001$

(b) $X \sim Bin(n = 2500, p = 0.001)$, $P[X = k] = \binom{2500}{k} \cdot 0.001^k \cdot 0.999^{2500-k}$

(c) Da n sehr gross und p sehr klein ist, ist eine gute Approximation gegeben durch eine Poissonverteilung mit $\lambda = np = 2.5, P[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

(d) $P[X \geq 2] = 1 - P[X = 1] - P[X = 0]$. Exakt gilt

$$P[X \geq 2] = 1 - \binom{2500}{1} \cdot 0.001^1 \cdot 0.999^{2499} - \binom{2500}{0} \cdot 0.001^0 \cdot 0.999^{2500} = 0.71286.$$

Und approximativ gilt

$$P[X \geq 2] = 1 - 2.5 \cdot e^{-2.5} - e^{-2.5} = 0.71270.$$

Lösung 6-3. (a) Es ist für $j \geq 0$

$$\begin{aligned} P[X = j] &= \sum_{k \geq j} P[X = j, Y = k] \\ &= \sum_{k \geq j} P[X = j \mid Y = k] \cdot P[Y = k] \\ &= \sum_{k \geq j} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

Siehe nächste Seite!

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\geq 0} \frac{(k+j)!}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} \sum_{k\geq 0} \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^j}{j!} e^{(1-p)\lambda} \;=\; e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^j}{j!}
\end{aligned}
$$

Also ist X poissonverteilt mit Parameter $p\lambda$. Ebenso ist $Y-X$ poissonverteilt mit Parameter $(1-p)\lambda$.

(b) Für $k, j \geq 0$ ist

$$
\begin{aligned}
P[Y-X=k, X=j] = P[Y=k+j, X=j] \;&=\; P[X=j \mid Y=k+j] \cdot P[Y=k+j] \\
&= \binom{k+j}{j} p^j (1-p)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} \\
&= \frac{1}{j!k!} p^j (1-p)^k e^{-p\lambda} e^{-(1-p)\lambda} \lambda^k \lambda^j \\
&= \left(e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^j}{j!}\right) \cdot \left(e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^k}{k!}\right) \\
&= P[X=j] \cdot P[Y-X=k]
\end{aligned}
$$

Folglich sind X und $Y-X$ unabhängig.

Lösung Challenge Serie 6. Sei für $j = 1, \ldots, n+k-1$ die Zufallsvariable

$$
X_j := \begin{cases} 1, & \text{falls das } j\text{-te Paar ein } \mathbf{MF}\text{-Paar ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Dann gilt

$$
E\left[X_j\right] = P\left[\text{das } j\text{-te Paar ist } \mathbf{MF}\right] = \frac{2nk(n+k-2)!}{(n+k)!} = 2\frac{nk}{(n+k)(n+k-1)}.
$$

Weil die Anzahl **MF**-Paare Y gleich ist mit $\sum_{j=1}^{n+k-1} X_j$ und somit Binomialverteilt, erhalten wir

$$
E[Y] = \sum_{j=1}^{n+k-1} E\left[X_j\right] = \sum_{j=1}^{n+k-1} 2\frac{nk}{(n+k)(n+k-1)} = 2\frac{nk}{n+k} = \frac{2}{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}.
$$

Dies entspricht gerade dem *harmonischen Mittel* von n und k.