Wahrscheinlichkeit und Statistik

Lösungen Serie 9

Lösung 9-1. (a) Wir berechnen zuerst die Dichtefunktion von $X_{(n)}$. Dazu berechnen wir die Verteilungsfunktion $F_{(n)}$ und leiten danach nach t ab:

$$F_{(n)}(t) = P[X_{(n)} \leq t] = P[X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t] = \prod_{k=1}^{n} P[X_k \leq t] = (F(t))^n .$$

Demzufolge erhalten wir

$$f_{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{(n)}(t) = nF^{n-1}(t)f(t).$$

Analog gehen wir beim Minimum vor:

$$1 - F_{(1)}(t) = 1 - P[X_{(1)} > t] = 1 - P[X_1 > t, \ldots, X_n > t] = 1 - (1 - F(t))^n .$$

Demzufolge erhalten wir

$$f_{(1)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{(1)}(t) = n\,(1 - F(t))\,f(t).$$

(b) Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} P\left[\frac{X_{(n)} - a_n}{b_n} \leq t\right] &= P\left[X_{(n)} \leq a_n + b_n t\right] \\ &= (F(a_n + b_n t))^n \\ &= \left(1 - e^{-\lambda(a_n + b_n t)}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} e^{-t}\right)^n . \end{aligned}$$

Das bedeuted, dass

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{X_{(n)} - a_n}{b_n} \leq t\right] = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-t}\right)^n = e^{-e^{-t}}.$$

Lösung 9-2. Wir bezeichnen mit X_i, $i = 1, \ldots, 1000$, Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen, und definieren $X_i = 1$, falls die i-te befragte Person mit "Nein" antwortet und $X_i = 0$, falls sie mit "Ja" antwortet, d.h. X_i i.i.d. $\sim Be(r)$, mit $r = P[X_i = 1]$.

(a) Gesucht ist $P[X_i = 1]$. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichket gilt, dass $P[X_i = 1] = P[X_i = 1|K]P[K] + P[X_i = 1|Z]P[Z] = 1 - \frac{1}{2}p$.

(b) Gesucht ist $E[S_{1000}]$. Die Linearität des Erwartungswertes liefert

$$E[S_{1000}] = E\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i\right] = \sum_{i=1}^{1000} E[X_i] = 1000(1 - \frac{1}{2}p).$$

(c) Gesucht ist $P[S_{1000} \geq 909]$. Mit den vorgegeben Werten für p und δ lässt sich dies umschreiben als $P[S_{1000} \geq (1+\delta) \cdot 1000(1-\frac{1}{2}p)]$, da $(1+\delta) \cdot 1000(1-\frac{1}{2}p) = 909$. Mit dem Satz über Chernoff-Schranken (Satz 5.6 im Skript) haben wir

$$\begin{aligned} P[S_{1000} \geq 909] &= P[S_{1000} \geq (1+\delta)E[S_{1000}]] \\ &\leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{E[S_{1000}]} \approx 0.956. \end{aligned}$$

Lösung 9-3. (a) Zuerst bemerken wir, dass U Werte in $(0,1)$ hat und V in $(0,\infty)$. Wir behandeln zuerst U. Dazu fixieren wir $u \in (0,1)$. Um ganz klar zu machen, welche Regeln und Formeln wir verwenden, definieren wir die (messbare) Funktion

$$h(x,y) := \mathbb{1}_{\{\frac{x}{x+y} \leq u\}}.$$

Dann gilt nach Definition $P[U \leq u] = E[h(X,Y)]$. Die gemeinsame Dichtefunktion $f_{(X,Y)}$ ist das Produkt zweier Exp(λ)–Dichten, d.h.

$$f_{(X,Y)} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\{x>0,\, y>0\}}.$$

Damit können wir die Wahrscheinlichkeit wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned} P[U \leq u] = E[h(X,Y)] &= \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty h(x,y) e^{-\lambda(x+y)} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\frac{x}{x+y} \leq u\}} e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x(u^{-1}-1) \leq y\}} e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_{x(u^{-1}-1)}^\infty \lambda e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-\lambda x(u^{-1}-1)} \,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u^{-1} x} \,\mathrm{d}x \\ &= u. \end{aligned}$$

Das bedeuted U ist uniform auf $(0,1)$ verteilt und somit ist $f_U(u) = \mathbb{1}_{\{0 \leq u \leq 1\}}$.

Kommen wir nun zu f_V. Dieses Beispiel wurde schon im Skript gerechnet mit Hilfe der *Faltung* (siehe S.102 im Skript). Dennoch möchten wir illustrieren, dass wir die Dichte mit einer analogen Argumentation wie mit f_U berechnen können. Dazu fixieren wir $v \in (0,\infty)$ und definieren die (messbare) Funktion

$$g(x,y) := \mathbb{1}_{\{x+y \leq v\}}.$$

Dann gilt nach Definition $P[V \leq v] = E[g(X,Y)]$. Analog zur obigen Rechnung erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
P[V \leq v] = E[g(X,Y)] &= \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(x,y) e^{-\lambda(x+y)} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x+y \leq v\}} e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \leq v\}} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y \leq v-x\}} e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^v e^{-\lambda x} \left(\int_0^{v-x} \lambda e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^v e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda(v-x)} \right) \mathrm{d}x \\
&= 1 - e^{-\lambda v} - \lambda v e^{-\lambda v}.
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nun $P[V \leq v]$ nach v abgeleitet haben (siehe S. 86 im Skript) erhalten wir $f_V(v) = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{\{v>0\}}$.

(b) Ein bisschen komplizierter, aber vom Schema her genau gleich. Fixieren wir $(u,v) \in (0,1) \times (0,\infty)$ und definiere die (messbare) Funktion

$$
k(x,y) := \mathbb{1}_{\{\frac{x}{x+y} \leq u,\, x+y \leq v\}}.
$$

Per Definition gilt dann $P[U \leq u,\, V \leq v] = E[k(X,Y)]$, sodass wir wieder ein Integral ausrechnen müssen:

$$
\begin{aligned}
P[U \leq u,\, V \leq v] = E[k(X,Y)] &= \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty k(x,y) e^{-\lambda(x+y)} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{\frac{x}{x+y} \leq u,\, x+y \leq v\}} e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x(u^{-1}-1) \leq y \leq v-x,\, x \leq uv\}} e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^{uv} e^{-\lambda x} \left(\int_{x(u^{-1}-1)}^{v-x} \lambda e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^{uv} e^{-\lambda x} \left(e^{-\lambda x(u^{-1}-1)} - e^{-\lambda(v-x)} \right) \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^{uv} \left(e^{-\lambda u^{-1} x} - e^{-\lambda v} \right) \mathrm{d}x \\
&= u \left(1 - e^{-\lambda v} - \lambda v e^{-\lambda v} \right).
\end{aligned}
$$

Dies stimmt aber genau mit dem Produkt der Dichtefunktionnen von U und V überein, sodass wir sofort schlussfolgern, dass U und V unabhängig sind und

$$
f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) f_V(v) = \lambda^2 v e^{-\lambda v} \mathbb{1}_{\{0 \leq u \leq 1,\, v>0\}}.
$$

Siehe nächste Seite!

Lösung Challenge Serie 9. (a) Die entscheindende Beobachtung ist die disjunkte Zerlegung

$$\{X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}\} = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \{X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \ldots X_{\sigma(n)}\},$$

wobei S_n die Menge aller Permutationen bezeichnet. Für eine beliebige (messbare und beschränkte) Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} E[g(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})] &= E[g(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}) \mathbb{1}_{\{X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}\}}] \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} E[g(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{\{X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n)}\}}] \\ &= n! E[g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \mathbb{1}_{\{X_1 < X_2 < \cdots < X_n\}}] \\ &= n! \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}} \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $(X_1, \ldots, X_n)$ unabhängig und identisch verteilt. Daraus schlussfolgern wir, dass

$$f_{(1),\ldots,(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n), & \text{falls } x_1 < x_2 < \cdots < x_n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

(b) Formal können wir die Dichtefunktion $f_{(k)}$ als Randverteilung berechnen

$$f_{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{(1),\ldots,(n)}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_k, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{k-1} \, \mathrm{d}x_k \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Dies erscheint jedoch aufgrund der Struktur (1) als etwas zu kompliziert. Stattdessen, verwenden wir ein heuristisches Argument um die Formel um $f_{(k)}$ zu berechnen. Dazu verwenden wir die Notation aus dem Skript auf S. 86, dass

$$P[x < X_{(k)} < x + \mathrm{d}x] \approx f_{(k)}(x) \, \mathrm{d}x.$$

Falls der k-grösste Wert nahe bei x ist, dann sind $k-1$ kleiner als x und $n-k$ sind grösser als x. Die Wahrscheinlichket, dass $X_1 < x$ ist gleich $F(x)$ und die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 > x$, ist gleich $1 - F(x)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{(k)}(x) \, \mathrm{d}x &\approx P[x < X_{(k)} < x + \mathrm{d}x] \\ &\approx P\left[k-1 \text{ sind links von } x, \text{ einer ist nahe bei } x \text{ und } (n-k) \text{ sind rechts von } x\right] \\ &\approx \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x) \, (1 - F(x))^{n-k} \, f(x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Daraus schlussfolgern wir, dass

$$f_{(k)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x) \, (1 - F(x))^{n-k} \, f(x). \tag{2}$$

(c) Die Dichtefunktion ist $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ und $F(x) = x$ für $x \in [0,1]$. Setzen wir in die Formel (2) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{(k)}(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x) \, (1 - F(x))^{n-k} \, f(x) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} \, (1 - x)^{n-k} \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies ist die sogenannte *Beta-Verteilung*. Sie ist eng verknüpft mit der Gamma-Verteilung aus dem Skript S. 102.

Der erwartungswert ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} E[X_{(k)}] &= \int_{\mathbb{R}} x f_{(k)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^k\,(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^{(k+1)-1}\,(1-x)^{(n-k+1)-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{k}{n+1}, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wir die Formel in den Tipps verwendet haben. Um die Varianz $\mathrm{Var}(X_{(k)})$ zu berechnen, verwenden wir (wie üblich) die Formel $\mathrm{Var}(X_{(k)}) = E[X_{(k)}^2] - E[X_{(k)}]^2$. Wir berechnen zuerst $E[X_{(k)}^2]$:

$$\begin{aligned} E[X_{(k)}^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{(k)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^{(k+2)-1}\,(1-x)^{(n-k+1)-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir

$$\mathrm{Var}(X_{(k)}) = E[\big(X_{(k)}\big)^2] - E[X_{(k)}]^2 = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}. \tag{4}$$

(d) Wir verwenden die Chebyshev Ungleichung

$$P[\big|X_{(pn)} - r_n\big| > \varepsilon] \le \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon},$$

wobei

$$r_n := E[X_{(pn)}] = \frac{pn}{qn+1} \quad \text{und} \quad \sigma_n^2 := \frac{pn(qn-pn+1)}{(qn+1)^2(qn+2)}.$$

Die beiden Formeln folgen aus den Rechnungen in (3) und (4) mit k ersetzt mit pn und n ersetzt mit qn. Die Folge (r_n) konvergiert gegen $\frac{p}{q} = r$ und die Folge (σ_n^2) gegen 0. Wegen der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|X_{(pn)} - r| \le |X_{(pn)} - r_n| + |r_n - r|$$

Siehe nächste Seite!

und schliesslich

$$P[|X_{(pn)} - r| > \varepsilon] \leq P[|X_{(pn)} - r_n| > \varepsilon] + \mathbb{1}_{\{|r_n - r| > \varepsilon\}} \leq \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon} + \mathbb{1}_{\{|r_n - r| > \varepsilon\}} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Bemerkung. Mit einem analogen Argument kann man das obige Resultat auf beliebige (stetige und strikt wachsende) Verteilungsfunktionen verallgemeinern. Die Zahl r muss dann durch das *Quantil* $F^{-1}(r)$ ersetzt werden.