1 Der Simplex Algorithmus I

1.1 Einführungsbeispiel

In einer Papiermühle wird aus Altpapier und anderen Vorstoffen feines und grobes Papier hergestellt. Der Erlös pro Tonne feines Papier beläuft sich auf 10 SFr. und für grobes Papier auf 7.5 SFr. Der Altpapierverbrauch beträgt 0.6 Tonnen pro Tonne grobes Papier und eine Tonne pro Tonne feines Papier. Maximal können 15 Tonnen Altpapier verarbeitet werden. Die Herstellung von einer Tonne feinem Papier erfordert 50 Kilogramm Vorstoffe und für eine Tonne grobes Papier werden 10 Kilogramm Vorstoffe benötigt. Es stehen höchstens 500 Kilogramm Vorstoffe zur Verfügung.

Welches Produktionsprogramm bringt den grössten Erlös, wenn maximal 20 Tonnen grobes Papier abgesetzt werden können?

Wir bezeichnen nun mit x_1 die Anzahl produzierter Tonnen feines Papier und mit x_2 die Anzahl Tonnen grobes Papier. Dann ist der Erlös

$$10x_1 + 7.5x_2$$

Dies ist die sogenannte Zielfunktion.

Die Zielfunktion soll maximiert werden unter den folgenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 0.6x_2 &\leq 15 \quad \text{(Altpapier)} \\ 50x_1 + 10x_2 &\leq 500 \quad \text{(Vorstoffe)} \\ x_2 &\leq 20 \quad \text{(Grobpapier)} \end{aligned}$$

Ausserdem müssen wir sicherstellen, dass die Variablen x_1 und x_2 nicht negativ sind. Wir fordern also zusätzlich

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Da sowohl Zielfunktion wie auch Nebenbedingungen linear in x_1 und x_2 sind, sprechen wir bei diesem Problem von einem linearen Programm oder kurz *(LP)*. Wir möchten also folgendes *(LP)* lösen:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 10x_1 + 7.5x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 + 0.6x_2 & \leq & 15 \\ & 50x_1 + 10x_2 & \leq & 500 \\ & x_2 & \leq & 20 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Graphische Interpretation

Damit ein Punkt zulässig ist, muss er gleichzeitig alle Nebenbedingungen erfüllen, einschliesslich Nichtnegativität. Deshalb nennt man diese Punkte zulässige Lösungen und die Menge aller zulässigen Lösungen heisst zulässiges Gebiet.

Offensichtlich stellt jede Nebenbedingung ein Halbraum dar, in unserem 2D-Beispiel die eine Seite der entsprechenden Gerade. Das zulässige Gebiet ist demnach der Durchschnitt dieser Halbräume, also ein konvexes Polyeder.

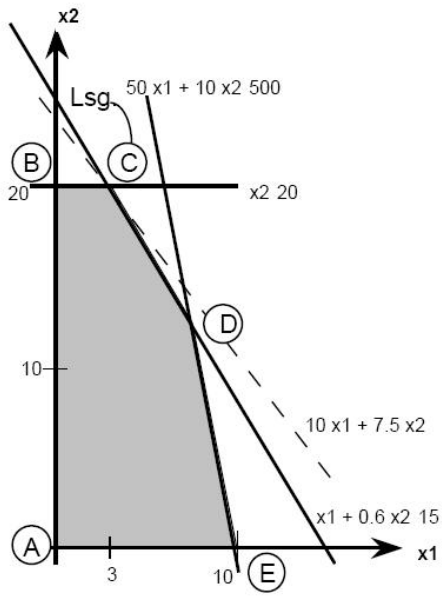

Abbildung 1: Graphische Lösung des *(LP)*

Besitzt eine Grenze einer Nebenbedingung keinen gemeinsamen Punkt mit dem zulässigen Gebiet, so heisst diese Nebenbedingung redundant. Redundante Nebenbedingungen können ohne Einschränkung aus den Betrachtungen gestrichen werden.

Die Zielfunktion ist eine Kurvenschar. Sie beschreibt den Term, der maximiert werden soll. In unserem Beispiel ist dies der Erlös

$$\text{ZF: } z = 10x_1 + 7.5x_2$$

Im 2D-Fall sind die Niveaulinien für beliebige z-Werte Geraden. Ändert sich der Wert von z, so verschiebt sich die Niveaulinie parallel dazu.

Eine optimale Lösung findet man, indem man die Niveaulinie der Zielfunktion parallel in Richtung zunehmender Zielfunktionswerte verschiebt, bis sie das zulässige Gebiet gerade noch berührt. Für die Papiermühle ist die optimale Lösung folglich der Punkt C mit $(x_1, x_2) = (3, 20)$. Der Erlös beträgt somit 180 SFr. Die Optimallösung wird in einem Eckpunkt oder sogenanntem Extremalpunkt angenommen.

Mathematische Formulierung

Kanonische Struktur eines linearen Programms:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet n die Anzahl Variablen und m die Anzahl Nebenbedingungen.

In Matrixschreibweise:

$$\max z = c^T x$$

unter

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Wobei wir mit $v_1 \leq v_2$ meinen, dass komponentenweise „$\leq$“ gelten soll.

Durch die Einführung von sogenannten Schlupfvariablen y_i, $i = 1, \ldots, m$ lässt sich die kanonische Form auf die sogenannte Standardform bringen, nämlich

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i &= b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ y_i &\geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise:

$$\max z = c^T x$$

unter

$$\begin{aligned} Ax + y &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Einführung von Schlupfvariablen würde bei unserem Beispiel folgendermassen aussehen:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.6x_2 + y_1 &= 15 \quad \text{(Altpapier)} \\ 50x_1 + 10x_2 + y_2 &= 500 \quad \text{(Vorstoffe)} \\ x_2 + y_3 &= 20 \quad \text{(Grobpapier)} \end{aligned}$$

1.2 Wiederholung: Lineare Algebra

Wir müssen oft Gleichungssysteme der folgenden Form lösen:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Hierzu bietet sich das Gaussverfahren an.

Um die Anzahl Lösungen von $Ax = b$ zu bestimmen, muss man eine Fallunterscheidung machen.

1. $r(A|b) > r(A)$
   $Ax = b$ hat keine Lösung, weil sich b nicht als Linearkombination der Spaltenvektoren von A darstellen lässt.
2. $r(A|b) = r(A) = \min(m, n), n \leq m$
   $Ax = b$ hat genau eine Lösung.
3. $r(A|b) = r(A) = \min(m, n), m < n$
   $Ax = b$ hat unendlich viele Lösungen.
4. $r(A|b) = r(A) < \min(m, n)$
   $Ax = b$ enthält $k = \min(m, n) - r(A)$ redundante Gleichungen, die gestrichen werden können. Nach dem Streichen dieser Gleichungen befinden wir uns entweder im zweiten oder im dritten Fall.

Uns interessiert offensichtlich nur der dritte Fall. Wir gehen also im Folgenden von $r(A) = m$ aus. Dann können wir A folgendermassen umordnen.

$$A = [B|N], \quad B \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{regulär}, N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$$

Entsprechend müssen wir auch x umordnen.

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

Die Komponenten von x_B heissen Basisvariablen, x_N sind die Nichtbasisvariablen.

Dann gilt

$$\begin{aligned} Ax &= [B|N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \\ &= Bx_B + Nx_N \\ &= b \end{aligned}$$

Der $(n - m)$-dimensionale Lösungsraum lässt sich folglich beschreiben als

$$\mathbb{L} = \left\{ (x_B, x_N)^T \mid x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ beliebig} \right\}$$

Eine sogenannte Basislösung von $Ax = b$ erhält man, indem man die Nichtbasisvariablen gleich Null setzt:

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Wahl von B nicht eindeutig ist, gibt es natürlich mehrere Basislösungen.

1.3 Polyedrische Mengen

Definition: (Polyeder)
Eine Menge $P \subset \mathbb{R}^n$ heisst polyedrische Menge oder einfach Polyeder, falls P ein endlicher Durchschnitt von Halbräumen ist, das heisst von der Form

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid [\mathbb{I}|A] \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = b, y \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Wenn man noch zusätzlich Nichtnegativität fordert, dann gilt

$$\begin{aligned} P &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid [\mathbb{I}|A] \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = b, x \geq 0, y \geq 0\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \mid [\mathbb{I}|A] \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = b, x \geq 0, y \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Ein Polyeder ist offensichtlich konvex.

Definition: (Extremalpunkt)

Ein Punkt x einer konvexen Menge X heisst Extremalpunkt, falls aus

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \quad x_1, x_2 \in X, \lambda \in (0,1)$$

folgt, dass

$$x_1 = x_2 = x.$$

Satz: (Zusammenhang Basislösung-Extremalpunkt)
Betrachte $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $r(A) = m(\leq n)$.
$x \in P$ ist Extremalpunkt $\iff$ Es gibt eine Zerlegung $A = [B|N]$ mit B regulär, $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $B^{-1}b \geq 0$.

Beweis:

„$\Longrightarrow$“:
Sei $A = [B|N]$, B regulär, $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$, $B^{-1}b \geq 0$
Zu zeigen: x ist extremal

Sei $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $x_1, x_2 \in P$, $\lambda \in (0,1)$.
Setze $x_1 = \begin{pmatrix} x_{1B} \\ x_{1N} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} x_{2B} \\ x_{2N} \end{pmatrix}$.
Dann gelten

$$\begin{aligned} B^{-1}b &= \lambda x_{1B} + (1-\lambda)x_{2B} \\ 0 &= \lambda x_{1N} + (1-\lambda)x_{2N} \end{aligned}$$

Weil $x_1, x_2 \in P$ gilt, sind alle Komponenten nichtnegativ. Deshalb folgt aus der zweiten Gleichung

$$x_{1N} = x_{2N} = 0$$

Weil B regulär ist, folgt aus der ersten Gleichung

$$x_{1B} = x_{2B} = B^{-1}b$$

Damit ist die eine Richtung gezeigt.

„$\Longrightarrow$“:
Sei $x \in P$ extremal.
Zu zeigen: Es gibt eine entsprechende Zerlegung $A = [B|N]$ und $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $B^{-1}b \geq 0$.

Ordne A so, dass $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$

Behauptung: Die ersten k Kolonnen von A sind linear unabhängig.
Annahme: Die ersten k Kolonnen von A sind linear abhängig.
Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \neq 0$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$ bzw. $A \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.
Setze $x' = x + \alpha \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$, $x'' = x - \alpha \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha > 0$ klein genug, so dass x', x'' immer noch zulässig sind. Dies kann folgendermassen konstruiert werden:

Definiere

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ -\frac{x_i}{\lambda_i} \,\middle|\, \lambda_i < 0 \right\} \\ \alpha_2 &:= \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i} \,\middle|\, \lambda_i > 0 \right\} \end{aligned}$$

Wähle $\alpha \in (0, \min\{\alpha_1, \alpha_2\})$
Weil $\lambda \neq 0$ ist, können die beiden Mengen $\left\{ -\frac{x_i}{\lambda_i} \mid \lambda_i < 0 \right\}$ und $\left\{ \frac{x_i}{\lambda_i} \mid \lambda_i > 0 \right\}$ nicht beide leer sein. α ist entsprechend wohldefiniert.
Weil $\lambda \neq 0$ und $\alpha > 0$ sind, ist $x' \neq x''$.
x', x'' sind in P, weil

$$\begin{aligned} Ax' &= Ax + \alpha \underbrace{A \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} = Ax = b \\ Ax'' &= Ax - \alpha \underbrace{A \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} = Ax = b \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$x = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Extremalität von x. Die ersten k Kolonnen von A müssen also tatsächlich linear unabhängig sein.

Weil $r(A) = m$ ist, kann man $(a_1, \ldots, a_k)$ durch weitere $(m-k)$ Vektoren $a_{k+1}, \ldots, a_m \in A \backslash \{a_1, \ldots, a_k\}$ zu einer Basis ergänzen.
Definiere $B = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m)$ und zerlege A entsprechend:

$$A = [B|N]$$

Weil $x \in P$ ist, gilt

$$Ax = [B|N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

Wegen der Regularität von B gilt

$$B^{-1}b = x = (x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0)^T \geq 0$$

Damit ist auch die zweite Richtung gezeigt. q.e.d.

Jede zulässige Basislösung entspricht also einem Extremalpunkt des Polyeders, und umgekehrt lässt sich jedem Extremalpunkt des Polyeders eine Basislösung zuordnen. Diese Zuordnung ist eindeutig, falls die Basislösung nichtdegeneriert ist.

Definition: (Degeneriertheit)
Eine (zulässige) Basis B heisst degeneriert, falls es ein i gibt mit $(B^{-1}b)_i = 0$, und nichtdegeneriert, falls $B^{-1}b > 0$.

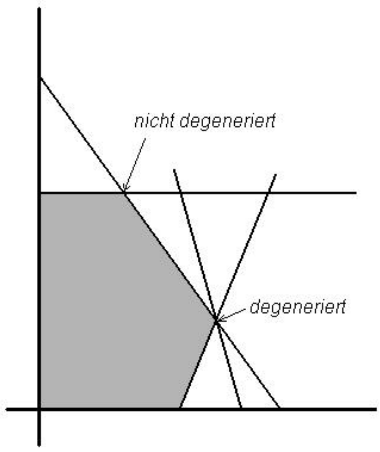

Abbildung 2: Degenerierte Basislösung

Definition: (Extremalrichtung)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge. Dann heisst $d \in \mathbb{R}^n$ Richtung in X, falls $x + \lambda d \in X,$ für alle $\lambda \geq 0$ und $x \in X$.

Eine Richtung d heisst Extremalrichtung, falls für Richtungen d_1, d_2 gilt, dass aus $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ folgt, dass $d_1 = \alpha d_2,$ für ein $\alpha > 0$.

Satz: (Darstellungssatz von Polyeder)
Jedes Polyeder P kann eindeutig geschrieben werden als

$$P = Q + C, \quad Q := conv\left\{x_1, x_2, \ldots, x_k\right\}, C := cone\left\{d_1, d_2, \ldots, d_l\right\}$$

1.4 Dualität

Primale Aufgabe *(LP)*:

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{unter} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Duale Aufgabe *(LD)*:

$$\begin{array}{lrcl} \min & b^T y & & \\ \text{unter} & A^T y & \geq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

In unserem Einführungsbeispiel ist die duale Aufgabe

$$\begin{array}{lrcl} \min & 15y_1 + 500y_2 + 15y_3 & & \\ \text{unter} & y_1 + 50y_2 & \geq & 10 \\ & 0.6y_1 + 10y_2 + y_3 & \geq & 7.5 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 & & \end{array}$$

Lemma: (Schwache Dualität)
Sei x eine zulässige Lösung von *(LP)*, y eine zulässige Lösung von *(LD)*. Dann gilt

$$c^T x \leq b^T y$$

Beweis:
$c^T x \leq (y^T A)x = y^T Ax \leq y^T b = b^T y$ q.e.d.

Korollar: (Zertifikat)
Seien x^*, y^* zulässig für *(LP)* resp. *(LD)* und es gelte $b^T y^* = c^T x^*$. Dann sind x^*, y^* optimal für *(LP)* resp. *(LD)*.

Satz: (Dualitätssatz der linearen Programmierung)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\max\left\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\right\} = \min\left\{b^T y \mid A^T y \geq c, y \geq 0\right\}$$

sofern beide Aufgaben zulässige Lösungen besitzen.

Beweis:
Für den Beweis dieses Satzes verwenden wir das Lemma von Farkas, das wir hier ohne Beweis aufführen.

Lemma: (Farkas)
Gegeben seien eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

1. $\exists x \geq 0$ mit $Ax \leq b$
2. $\exists y \geq 0$ mit $y^T A \geq 0$ und $y^T b < 0$

Um den Satz zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass es ein $x \geq 0$ und ein $y \geq 0$ gibt mit

- $Ax \leq b$,
- $A^T y \geq c$,
- $c^T x \geq b^T y$. (Mit der schwachen Dualität folgt nämlich $c^T x = b^T y$.)

Das heisst, wir müssen zeigen, dass es ein $z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$ gibt mit

$$\hat{A}z := \begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^T & b^T \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} =: \hat{b}.$$

Gemäss Farkas-Lemma hat genau eines der folgenden zwei Systeme eine Lösung:

1. $\exists z \geq 0$ mit $\hat{A}z \leq \hat{b}$
2. $\exists s \geq 0$ mit $s^T \hat{A} \geq 0$ und $s^T \hat{b} < 0$.

Zu zeigen: Das zweite System hat keine Lösung.

Das heisst, wir zeigen, dass für alle $(u, v, w) \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} u^T A - vc^T &\geq 0 \\ vb^T - w^T A^T &\geq 0 \end{aligned}$$

gilt $u^T b - w^T c \geq 0$.
Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $v > 0$

$$\begin{aligned} u^T b &= \frac{1}{v} v u^T b \\ &= \frac{1}{v} u^T \underbrace{vb}_{\geq Aw} \\ &\geq \frac{1}{v} \underbrace{u^T A}_{\geq vc^T} w \\ &= \frac{1}{v} vc^T w = c^T w \\ &= w^T c. \end{aligned}$$

2. Fall: $v = 0$

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} u^T A &\geq 0 \\ -w^T A^T &\geq 0 \end{aligned}$$

Weil *(LP)* und *(LD)* zulässig sind, gibt es ein $x^* \geq 0$ und ein $y^* \geq 0$ mit $Ax^* \leq b$ und $A^T y^* \geq c$.

Folglich gilt

$$\begin{aligned} u^T b &\geq \underbrace{u^T A}_{\geq 0} x^* \\ &\geq 0 \\ &\geq (w^T A^T) y^* \\ &= w^T \underbrace{A^T y^*}_{\geq c} \\ &= w^T c. \end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar: Besitzt *(LP)* eine endliche Optimallösung x^*, so besitzt auch *(LD)* eine endliche Optimallösung y^* und es gilt $c^T x^* = b^T y^*$.

Beweis:
Es genügt zu zeigen, dass *(LD)* eine zulässige Lösung besitzt.

Annahme: Es gibt kein $y \geq 0$ mit $A^T y \geq c$.
Das heisst, es gibt kein $y \geq 0$ und kein $s \geq 0$ mit $A^T y - s = c$ bzw. es gibt kein $v := \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix}$ mit $[A^T | -\mathbb{I}] \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = c$.

Nach dem Farkas-Lemma muss es folglich ein $z \geq 0$ geben mit $z^T [A^T | -\mathbb{I}] \leq 0$ und $z^T c > 0$.

Also gilt

$$\begin{aligned} z &\geq 0 \\ Az &\leq 0 \\ c^T z &> 0 \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, dass z eine Richtung mit wachsendem Zielfunktionswert für *(LP)* ist. Denn für alle $\lambda \geq 0$ ist $x + \lambda z$ zulässig:

$$A(x + \lambda z) = \underbrace{Ax}_{\leq b} + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{Az}_{\leq 0} \leq b$$

Für den Zielfunktionswert gilt

$$c^T(x+\lambda z) = c^T x + \lambda \underbrace{c^T z}_{>0} \geq c^T x.$$

Man kann also λ immer grösser machen, bleibt immer im zulässigen Bereich und der Zielfunktionswert wächst immer mehr an. Dies ist ein Widerspruch zur Endlichkeit der Optimallösung x^* von *(LP)*.

q.e.d.

Satz: (Komplementaritätssatz)
Sei x^* eine zulässige Lösung von *(LP)* und y^* eine zulässige Lösung von *(LD)*. (x^*, y^*) sind genau dann Optimallösungen der entsprechenden Probleme, falls

1. $$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \text{ oder } x_j^* = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

2. $$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = c_i \text{ oder } y_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Beweis:
Seien x^*, y^* primal bzw. dual zulässig. Dann gelten

1. $$c_j x_j^* \leq \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j^*, \quad j = 1 \ldots, n$$

2. $$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq b_i y_i^*, \quad i = 1 \ldots, m.$$

Summieren wir die erste Ungleichung über $j = 1, \ldots, n$ und die zweite Ungleichung über $i = 1, \ldots, m$, so erhalten wir

1. $$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j^*$$

2. $$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$

Folglich gilt

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$

Damit Gleichheit gilt, müssen beide Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt sein. Dies ist nur der Fall, wenn für alle i und für alle j gilt

1.
$$x_j^* = 0 \quad \text{und/oder} \quad c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$

2.
$$y_i^* = 0 \quad \text{und/oder} \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*.$$

q.e.d.

Zulässigkeit und Komplementarität lassen sich auch folgendermassen zusammenfassen.

Satz: (Kuhn-Tucker)
(x^*, y^*) sind genau dann ein Paar von Optimallösungen zu *(LP)* und *(LD)*, wenn sie die nachfolgenden Gleichungen erfüllen.

1. $Ax^* \leq b$, $x^* \geq 0$
2. $A^T y^* \geq c$, $y^* \geq 0$
3. $(x^*)^T (A^T y^* - c) = 0$
   $(y^*)^T (-Ax^* + b) = 0$