Mathematische Logik

Grundlagen, Aussagenlogik, Semantische Äquivalenz

Felix Hensel

February 21, 2012

Dies ist im Wesentlichen eine Zusammenfassung der Abschnitte 1.1-1.3 aus Wolfgang Rautenberg's Buch *Einführung in die Mathematische Logik* [1].

1 Boolesche Funktionen und Formeln

Die Aussagenlogik entstand aus der Analyse von Verknüpfungen von Aussagen A und B, wie zum Beispiel

$$A \textit{ und } B, A \textit{ oder } B, A \textit{ genau dann wenn } B.$$

Wir wollen uns hier auf die *2-wertige Aussagenlogik* beschränken. Diese basiert auf den folgenden zwei Grundprinzipien:

- *Zweiwertigkeitsprinzip*: Es gibt genau 2 Wahrheitswerte, *wahr* und *falsch*.
- *Extensionalitätsprinzip*: Der Wahrheitswert einer Verknüpfung von Aussagen hängt nur vom Wahrheitswert ihrer Bestandteile ab.

In der 2-wertigen Logik unterscheidet man also nicht verschiedene Wahrheitsgrade. Wir beschäftigen uns weder mit dem Sinn, noch mit den möglichen Interpretationen von Aussagen. Daher können die Wahrheitswerte *wahr* und *falsch* auch mit 1 und 0, oder mit beliebigen anderen Symbolen identifiziert werden.

Definition 1.1. Eine *n-stellige Boolesche Funktion* oder *Wahrheitsfunktion* ist eine Abbildung $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Mit $\mathbf{B}_n$ bezeichnet man die Gesamtheit aller n-stelligen Booleschen Funktionen. Die Menge $\mathbf{B}_0$ besteht nur aus den Konstanten 0 und 1.

Es gibt genau 2^{2^n} Funktionen in $\mathbf{B}_n$. Einer Aussagenverknüpfung wird eine Boolesche Funktion zugeordnet, die mit dem selben Symbol bezeichnet wird. Aus dem Kontext ist klar ob mit diesem Symbol die Aussagenverknüpfung gemeint ist, oder die zugehörige

Boolesche Funktion. Zum Beispiel wird der *Negation* $\neg$ die folgende 1-stellige Boolesche Funktion zugeordnet:

$$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\} \quad \neg 0 := 1, \neg 1 := 0.$$

Eine 2-stellige Boolesche Funktion $\circ \in \mathbf{B}_2$ wird auch durch ihre *Wertematrix* $\left(\begin{smallmatrix} 1\circ 1 & 1\circ 0 \\ 0\circ 1 & 0\circ 0 \end{smallmatrix}\right)$ bestimmt. Die logischen Symbole $\wedge, \vee, \neg, \ldots$ heissen *Junktoren*.
Die wichtigsten der 16 zweistelligen Aussagenverknüpfungen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Aussagenverknüpfung	**Symbol**	**Wertematrix**
Konjunktion *A und B*; *Sowohl A als auch B*	$\wedge, \&$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$
Disjunktion *A oder B*	$\vee$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$
Implikation *Aus A folgt B*; *A nur dann wenn B*	$\to, \Rightarrow$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$
Äquivalenz *A genau dann wenn B*	$\leftrightarrow, \Leftrightarrow$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$
Antivalenz *Entweder A oder B*	$+$	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$
Nihilition *Weder A noch B*	$\downarrow$	$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$
Unverträglichkeit *Nicht zugleich A und B*	$\uparrow$	$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

Aussagenlogische Sprachen beziehungsweise *aussagenlogische Formeln* sind aus gewissen Grundsymbolen aufgebaut. Dazu gehören:

- *Aussagenlogische Variablen*. Mit AV wird deren Gesamtheit bezeichnet. Beispiel: $p_1, p_2, \ldots$
- *Logische Signatur*. Beispiel: $\wedge, \vee, \neg, \ldots$
- Technische Hilfssymbole. Beispiel: (,).

Die Menge der Aussagenlogischen Variablen kann beliebig sein, insbesondere muss sie nicht abzählbar sein. Wichtige aussagenlogische Formeln sind die *Booleschen Formeln*.

Definition 1.2. Die *Booleschen Formeln* $\mathcal{F}$ sind rekursiv über den folgenden Grundsymbolen definiert: $(,), \wedge, \vee, \neg, p_1, p_2, \ldots$

Rekursive Formelbestimmung:

- Die Variablen $p_1, p_2, \ldots$ sind Formeln, sogenannte *Primformeln.*
- Falls α, β Formeln sind, so sind es auch die Zeichenfolgen $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $\neg\alpha$.

$\mathcal{F}$ ist definiert als die kleinste aller Mengen Z von Zeichenfolgen aus den Grundsymbolen, die die folgenden Eigenschaften hat:

(B1) $p_1, p_2, \ldots \in Z$

(B2) $\alpha, \beta \in Z \implies (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), \neg\alpha \in Z.$

$\{\wedge, \vee, \neg\}$ heisst *Boolesche Signatur.*

Beispiel 1.3. $(p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_1)) \in \mathcal{F}$ aber $(p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_1) \notin \mathcal{F}$, da eine schliessende Klammer fehlt.

Analog dazu werden andere aussagenlogische Sprachen über die rekursive Formelbestimmung definiert indem man die Grundsymbole entsprechend anpasst.

Bemerkung 1.4. Andere logische Symbole können als Abkürzungen verwendet werden. Zum Beispiel:

$$(\alpha \to \beta) := \neg(\alpha \wedge \neg\beta),\ (\alpha \leftrightarrow \beta) := (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha),\ \bot := (p_1 \wedge \neg p_1),\ \top := \neg\bot$$

Die Zeichen $\top, \bot \in \mathbf{B}_0$ stehen für das stets Wahre bzw. stets Falsche, sie werden *Verum* bzw. *Falsum* genannt.

Notation. Im Folgenden bezeichnen

- $p, q, r \ldots$ aussagenlogische Variablen,
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \ldots$ Formeln , π Primformeln,
- X, Y, Z Formelmengen.

Um das Aufschreiben von Formeln zu erleichtern benutzen wir ausserdem folgende Konventionen:

- In Formeln der Gestalt $(\alpha \circ \beta)$ dürfen Aussenklammern weggelassen werden (wobei $\circ$ ein 2-stelliger Junktor ist).
  D.h. es ist erlaubt $p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$ anstatt $(p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3))$ zu schreiben.
- Von $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ bindet jeder Junktor stärker als der vorangehende.
  D.h. man kann $p_1 \vee p_2 \wedge \neg p_3$ anstatt $(p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3))$ schreiben.
- Falls mehrmals derselbe Junktor hintereinander angewendet wird, so verwendet man Rechtsklammerung.
  $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3$ steht also für $\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_3)$.
  $\bigwedge_{k \le n} \alpha_k := \alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ und $\bigvee_{k \le n} \alpha_k := \alpha_0 \vee \ldots \vee \alpha_n$.

Falls eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ auf eine Zeichenfolge φ zutrifft, so schreib man $\mathcal{E}\varphi$.

Satz 1.5 (**Beweisprinzip durch Formelinduktion**). *$\mathcal{E}$ sei eine Eigenschaft von Zeichenfolgen, so dass:*

(i) $\mathcal{E}\pi$ für alle Primformeln π.

(ii) Für alle α, $\beta \in \mathcal{F}$ gilt: $\mathcal{E}\alpha$, $\mathcal{E}\beta \implies \mathcal{E}(\alpha \wedge \beta)$, $\mathcal{E}(\alpha \vee \beta)$, $\mathcal{E}\neg\alpha$.

Dann gilt $\mathcal{E}\varphi$ für alle Formeln $\varphi \in \mathcal{F}$.

Beweis. Die Menge aller Zeichenfolgen Z auf die $\mathcal{E}$ zutrifft erfüllt die Eigenschaften (B1) und (B2). Daher gilt $\mathcal{F} \subset Z$ nach Definition von $\mathcal{F}$. □

Der Nachweis einer Eigenschaft durch Formelinduktion über der Aufbau von φ wird *Beweis durch Induktion über* φ genannt. Beispielsweise kann man per Induktion leicht beweisen, dass jedes $\varphi \in \mathcal{F}$, das keine Primformel ist, von der Form $\neg\alpha$ oder $(\alpha \circ \beta)$, wobei $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$. Es ist etwas schwieriger zu zeigen, dass eine solche Zerlegung eindeutig ist. Man nennt dies die *eindeutige Rekonstruktionseigenschaft*.

Die nachfolgende Definition ist ein Beispiel für das allgemeine Prinzip der *rekursiven* (oder *induktiven*) *Definition*.

Definition 1.6. Für $\varphi \in \mathcal{F}$ sie die Menge aller *Subformeln* $\mathrm{Sf}\varphi$ von φ gegeben durch:

$$\mathrm{Sf}\pi := \{\pi\} \text{ für alle Primformeln } \pi\,; \quad \mathrm{Sf}\neg\alpha := \mathrm{Sf}\alpha \cup \{\neg\alpha\}$$
$$\mathrm{Sf}(\alpha \circ \beta) := \mathrm{Sf}\alpha \cup \mathrm{Sf}\beta \cup \{(\alpha \circ \beta)\} \text{ wobei } \circ \text{ ein 2-stelliger Junktor ist.}$$

Falls eine Funktion f auf $\mathcal{F}$ mit diesem Verfahren definiert wird, so sagt man f sei *rekursiv über den Formelaufbau definiert*.

Definition 1.7. Eine Abbildung $w : AV \to \{0, 1\}$ wird aussagenlogische *Belegung* (oder *Modell*) genannt.

Bemerkung 1.8. Durch eine Belegung w wird jeder Aussagenvariablen ein Wahrheitswert zugeordnet. Nach dem Extensionalitätsprinzip hängt der Wahrheitswert von zusammengesetzten Aussagen nur vom Wahrheitswert der Bestandteile ab. Daher kann w rekursiv über den Formelaufbau zu einer Abbildung (mit derselben Bezeichnung) $w : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ fortgesetzt werden:

$$w(\alpha \wedge \beta) := w\alpha \wedge w\beta, \quad w(\alpha \vee \beta) := w\alpha \vee w\beta, \quad w(\neg\alpha) := \neg w\alpha, \text{ für } \alpha, \beta \in \mathcal{F}.$$

Hier bezeichnen die Junktoren auf der rechten Seite jeweils die zugehörige Boolesche Funktion.

Nun macht es auch Sinn vom *Wahrheitswert* $w\varphi$ einer Formel $\varphi \in \mathcal{F}$ bei der Belegung w zu sprechen.

Definition 1.9. Die Teilmenge aller Formeln in höchstens den Variablen $p_1, \ldots, p_n$ wird mit $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ bezeichnet.

Lemma 1.10. *Für $\varphi \in \mathcal{F}_n$ gilt: $w\varphi = w'\varphi$, falls $wp_i = w'p_i$ für $1 \leq i \leq n$.*

Beweis. Beweis durch Formelinduktion.

(i) $wp_i = w'p_i$ gilt nach Voraussetzung für $1 \leq i \leq n$.

(ii) $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_n$ mit $w\alpha = w'\alpha$, $w\beta = w'\beta$

$$\Longrightarrow \; w(\neg\alpha) = w'(\neg\alpha), \quad w(\alpha \wedge \beta) = w'(\alpha \wedge \beta), \quad w(\alpha \vee \beta) = w'(\alpha \vee \beta).$$

Daher gilt für alle $\varphi \in \mathcal{F}_n : w\varphi = w'\varphi$. □

Definition 1.11. Die Formel $\alpha \in \mathcal{F}_n$ repräsentiert die n-stellige Boolesche Funktion $f \in \mathbf{B}_n$, falls für alle Belegungen w gilt:

$$w\alpha = fw\vec{p}$$

Hier sei $\vec{p} := (p_1, \ldots, p_n)$ und entsprechend $w\vec{p} := (wp_1, \ldots, wp_n)$.

Für $\alpha \in \mathcal{F}_n$ ist der Wahrheitswert $w\alpha$ bereits durch $wp_1, \ldots, wp_n$ eindeutig festgelegt. Daher repräsentiert α *genau eine* n-stellige Funktion $\alpha^{(n)} \in \mathbf{B}_n$.

Beispiel 1.12. Die Formeln $p_1 \vee p_2$, $\neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ und $(p_1 \to p_2) \to p_2$ repräsentieren alle die Funktion $\vee \in \mathbf{B}_2$.

2 Semantische Äquivalenz und Normalformen

Definition 2.1. Die Formeln $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ heissen (semantisch oder logisch) *äquivalent* (oder *wertverlaufsgleich*), falls $w\alpha = w\beta$ für alle Belegungen w gilt.
Notation: $\alpha \equiv \beta$

Nach Definition 1.11 gilt:

$$\alpha \equiv \beta \iff \forall n \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathcal{F}_n \text{ repräsentieren } \alpha \text{ und } \beta \text{ dieselbe Funktion in } \mathbf{B}_n.$$

Da $\mathbf{B}_n$ aus 2^{2^n} verschiedenen Funktionen besteht gilt also, dass höchstens 2^{2^n} Formeln aus $\mathcal{F}_n$ paarweise nicht äquivalent sein können.

Häufig wird in der Arithmetik nicht zwischen syntaktischer und semantischer Äquivalenz unterschieden. Zum Beispiel schreibt man $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ und meint damit, dass die Terme dieselbe Funktion repräsentieren (also semantische Äquivalenz). In der Logik wollen wir aber diese Unterscheidung klar treffen und schreiben $\varphi = \psi$ für Zeichenfolgen φ, ψ nur dann falls diese syntaktisch übereinstimmen.
Die Relation $\equiv$ erfüllt folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll}
(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge \beta \wedge \gamma, & (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee \beta \vee \gamma & \text{(Assoziativität)} \\
\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha, & \alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha, & \text{(Kommutativität)} \\
\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha, & \alpha \vee \alpha \equiv \alpha, & \text{(Idempotenz)} \\
\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha, & \alpha \vee \alpha \wedge \beta \equiv \alpha, & \text{(Absorption)} \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv \alpha \wedge \beta \vee \alpha \wedge \gamma, & \alpha \vee \beta \wedge \gamma \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), & \text{(Distributivität)} \\
\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta, & \neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta, & \text{(DeMorgansche Regeln).}
\end{array}$$

Weitere nützliche Äquivalenzen sind:

$$\top \equiv \alpha \vee \neg\alpha, \quad \bot \equiv \alpha \wedge \neg\alpha, \quad \alpha \vee \bot \equiv \alpha \wedge \top \equiv \alpha$$

$$\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \wedge \beta \equiv \neg\alpha \vee \alpha \wedge \beta, \quad \alpha \to \beta \to \gamma \equiv \alpha \wedge \beta \to \gamma \equiv \beta \to \alpha \to \gamma.$$

Dies können wir zu

$$\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \equiv \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n-1} \to \alpha_n$$

verallgemeinern. Des Weiteren ist $\to$ linksdistributiv bezüglich $\wedge$ und $\vee$

$$\alpha \to \beta \wedge \gamma \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma), \quad \alpha \to \beta \vee \gamma \equiv (\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma).$$

Die Implikation $\to$ ist jedoch nicht rechtsdistributiv:

$$\alpha \wedge \beta \to \gamma \equiv (\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma), \quad \alpha \vee \beta \to \gamma \equiv (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$$

Ausserdem ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation:

$$\begin{array}{rl} \alpha \equiv \alpha & \text{(Reflexivität)} \\ \alpha \equiv \beta \implies \beta \equiv \alpha & \text{(Symmetrie)} \\ \alpha \equiv \beta, \beta \equiv \gamma \implies \alpha \equiv \gamma & \text{(Transitivität).} \end{array}$$

Des Weiteren ist $\equiv$ auch eine *Kongruenz* auf $\mathcal{F}$:

$$\alpha \equiv \alpha',\ \beta \equiv \beta' \implies \alpha \circ \beta \equiv \alpha' \circ \beta' \quad (\circ \in \{\wedge, \vee\})$$

Es gilt das *Ersetzungstheorem*: $\alpha \equiv \alpha' \implies \varphi \equiv \varphi'$, wobei φ' aus φ durch ein- oder mehrmaliges Ersetzen der möglicherweise in φ auftretenden Subformel α duch α' entsteht. Dieses Theorem wird vermutlich zu einem späteren Zeitpunkt im Seminar bewiesen.

Definition 2.2.

- Primformeln und deren Verneinungen werden *Literale* genannt.
- Eine Disjunktion $\bigvee_{k \leq n} \alpha_k$ heisst *disjunktive Normalform* (DNF), falls jedes α_k eine Konjunktion von Literalen ist.
- Eine Konjunktion $\bigwedge_{k \leq n} \beta_k$ heisst *konjunktive Normalform* (KNF), falls jedes β_k eine Disjunktion von Literalen ist.
- Eine DNF in n Variablen heisst *kanonisch* falls in jeder ihrer Disjunktionen jede der n Variablen genau einmal auftritt. Eine KNF mit der analogen Eigenschaft wird ebenfalls kanonisch genannt.

Konvention: die leere Disjunktion ist definiert als $\bot$ und die leere Konjunktion analog als $\top$.

Beispiel 2.3. Die Formel $p \vee (q \wedge \neg p)$ ist eine DNF.
Jedoch ist $p \vee \neg(q \wedge \neg p)$ weder eine DNF noch eine KNF.

Notation. Für Variablen p sei $p^1 := p$ und $p^0 := \neg p$.

Satz 2.4. *Sei f eine beliebige Boolesche Funktion und sei $n \geq 0$ so gewählt, dass $f \in B_n$. Dann ist f ist sowohl durch die DNF*

$$\alpha := \bigvee_{f(x_1,\ldots,x_n)=1} p_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n}$$

als auch durch die KNF

$$\beta := \bigwedge_{f(x_1,\ldots,x_n)=0} p_1^{\neg x_1} \vee \ldots \vee p_n^{\neg x_n}$$

repräsentierbar.

Beweis. Für eine beliebige Belegung w gilt: $wp_1^{x_1} = 1 \iff wp_1 = x_1$.
Wir erhalten damit für alle $n \geq 1$ und $x_1, \ldots x_n \in \{0,1\}$:

$$w(p_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n}) = wp_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge wp_n^{x_n} = 1 \iff wp_1 = x_1, \ldots, wp_n = x_n \iff w\vec{p} = \vec{x} \quad (\star)$$

$$\begin{aligned} w\alpha = 1 &\iff \exists \vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ mit } f\vec{x} = 1 \text{ und } w(p_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n}) = 1 \\ &\overset{(\star)}{\iff} \exists \vec{x} \in \{0,1\}^n \text{ mit } f\vec{x} = 1 \text{ und } w\vec{p} = \vec{x} \\ &\iff fw\vec{p} = 1. \end{aligned}$$

Damit folgt nun $w\alpha = fw\vec{p}$ direkt aus der Zweiwertigkeit.
Für die KNF geht der Beweis ähnlich (oder man benutzt den Dualitätssatz 2.11). □

Beispiel 2.5. Die Antivalenz $+ \in \mathbf{B}_2$ ist definiert durch $x_1 + x_2 = 1 \iff x_1 \neq x_2$ wobei $x_1, x_2 \in \{0,1\}$. Satz 2.4 liefert für die Antivalenz die DNF $p_1 \wedge \neg p_2 \vee \neg p_1 \wedge p_2$ und die KNF $(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)$.

Definition 2.6. Eine logische Signatur heisst (*term-*) *funktional vollständig*, falls jede Boolesche Funktion durch eine Formel in dieser Signatur repräsentiert werden kann.

Wir wissen bereits, dass jede Boolesche Formel eine Boolesche Funktion repräsentiert. Satz 2.4 besagt, dass auch die Umkehrung gilt. Es kann also jede Boolesche Funktion durch eine Boolesche Formel repräsentiert werden. Die Boolesche Signatur $\{\wedge, \vee, \neg\}$ ist daher funktional vollständig.

Korollar 2.7. *Die Signaturen $\{\wedge, \neg\}$ und $\{\vee, \neg\}$ sind funktional vollständig.*

Beweis. Es ist $p_1 \wedge p_2 \equiv \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$ und $p_1 \vee p_2 \equiv \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$. Das Ersetzungstheorem und die Tatsache, dass $\{\wedge, \vee, \neg\}$ funktional vollständig ist, liefern die Aussage. □

Beispiel 2.8. (i) Wegen Korollar 2.7 ist $\{\downarrow\}$ funktional vollständig, denn es gilt $\neg p \equiv p \downarrow p$ und $p \wedge q \equiv \neg p \downarrow \neg q$.

(ii) Die Signatur $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ist nicht funktional vollständig. Denn sei w eine Belegung mit $wp = 1$ für alle Variablen. Durch Formelinduktion sieht man sofort, dass $w\alpha = 1$ für jede Formel α. Daher gibt es keine Formel α mit $\alpha \equiv \neg p$. Das heisst die Boolesche Funktion $\neg \in B_1$ kann durch keine Formel repräsentiert werden.

Zwei Signaturen heissen *termäquivalent*, falls deren Formeln dieselben Booleschen Funktionen repräsentieren.

Definition 2.9. Die Abbildung $\delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ sei rekursiv definiert durch:

$$p^\delta := p, \quad (\neg\alpha)^\delta := \neg\alpha^\delta, \quad (\alpha \wedge \beta)^\delta := \alpha^\delta \vee \beta^\delta, \quad (\alpha \vee \beta)^\delta := \alpha^\delta \wedge \beta^\delta.$$

α^δ wird die zu α *duale* Formel genannt.
Für $f \in \mathbf{B}_n$ definieren wie die zu f *duale Funktion* $f^\delta \in \mathbf{B}_n$ durch:

$$f^\delta(x_1, \ldots, x_n) := \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$$

Eine Boolesche Funktion $f \in \mathbf{B}_n$ heisst *selbstdual*, falls für alle $\vec{x} \in \{0,1\}^n$ die Gleichung $f^\delta\vec{x} = f\vec{x}$ gilt.

Bemerkung 2.10. Die Funktion $\neg \in \mathbf{B}_1$ ist offensichtlich selbstdual. Die duale Formel α^δ entsteht aus α durch vertauschen von $\wedge$ und $\vee$. Falls α eine DNF ist, so ist α^δ eine KNF und umgekehrt.

Satz 2.11 (Dualitätssatz der 2-wertigen Logik)**.** *Falls α die Funktion f repräsentiert, dann repräsentiert die duale Formel α^δ die duale Funktion f^δ.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}$ die Eigenschaft:

$$\text{"Für jedes } n \text{ mit } \alpha \in \mathcal{F}_n \text{ gilt } \left(\alpha^\delta\right)^{(n)} = \left(\alpha^{(n)}\right)^\delta\text{"}.$$

Wenn wir $\mathcal{E}\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathcal{F}$ nachweisen können ist der Dualitätssatz bewiesen.
Formelinduktion: Sei w eine beliebige Belegung.

(i) Sei $\pi \in AV$ eine Primformel und sei $n \geq 1$. Wir können annehmen, dass $\pi = p_1 \in AV$ ist (sonst benennen wir die Variablen um).
Dann ist $\pi^{(n)} : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ die Projektion auf die erste Koordinate (denn $w\pi = \pi^{(n)}w\vec{p}$ wobei $\vec{p} = (\pi, p_2, \ldots, p_n)$).

$$w\pi^\delta = w\pi = \pi^{(n)}w\vec{p} = \neg\pi^{(n)}\neg w\vec{p} = \left(\pi^{(n)}\right)^\delta w\vec{p}$$

Dies zeigt $\mathcal{E}\pi$.

(ii) Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ mit $\mathcal{E}\alpha$ und $\mathcal{E}\beta$. Man wähle n, m so dass $\alpha \in \mathcal{F}_n$ und $\beta \in \mathcal{F}_m$. O.B.d.A. sei $n \geq m$, so dass $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ und $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_n$ gilt. Im Folgenden sei $\vec{p} := (p_1, \ldots, p_n)$.

$$w\,(\neg\alpha)^\delta = w\neg\alpha^\delta = \neg w\alpha^\delta = \neg\left(\alpha^\delta\right)^{(n)} w\vec{p} = \neg\left(\alpha^{(n)}\right)^\delta w\vec{p} = \left(\neg\alpha^{(n)}\right)^\delta w\vec{p} \Rightarrow \mathcal{E}(\neg\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
w(\alpha\wedge\beta)^\delta &= w\alpha^\delta \vee w\beta^\delta \\
&= \left(\alpha^\delta\right)^{(n)} w\vec{p} \vee \left(\beta^\delta\right)^{(n)} w\vec{p} \\
&= \left(\alpha^{(n)}\right)^\delta w\vec{p} \vee \left(\beta^{(n)}\right)^\delta w\vec{p} \\
&= \neg\alpha^{(n)}\neg w\vec{p} \vee \neg\beta^{(n)}\neg w\vec{p} \\
&= \neg\left(\alpha^{(n)}\neg w\vec{p} \wedge \beta^{(n)}\neg w\vec{p}\right) \\
&= \neg(\alpha\wedge\beta)^{(n)}(\neg w\vec{p}) \\
&= \left((\alpha\wedge\beta)^{(n)}\right)^\delta (w\vec{p}) \\
&\implies \mathcal{E}(\alpha\wedge\beta)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
w(\alpha\vee\beta)^\delta &= w\alpha^\delta \wedge w\beta^\delta \\
&= \left(\alpha^\delta\right)^{(n)} w\vec{p} \wedge \left(\beta^\delta\right)^{(n)} w\vec{p} \\
&= \left(\alpha^{(n)}\right)^\delta w\vec{p} \wedge \left(\beta^{(n)}\right)^\delta w\vec{p} \\
&= \neg\alpha^{(n)}\neg w\vec{p} \wedge \neg\beta^{(n)}\neg w\vec{p} \\
&= \neg\left(\alpha^{(n)}\neg w\vec{p} \vee \beta^{(n)}\neg w\vec{p}\right) \\
&= \neg(\alpha\vee\beta)^{(n)}(\neg w\vec{p}) \\
&= \left((\alpha\vee\beta)^{(n)}\right)^\delta (w\vec{p}) \\
&\implies \mathcal{E}(\alpha\vee\beta)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Formelinduktion beendet und $\mathcal{E}\alpha$ für jedes $\alpha \in \mathcal{F}$ nachgewiesen. Dies beweist den Dualitätssatz. □

Bemerkung 2.12. Wenn $f \in \mathbf{B}_n$ durch eine (kanonische) DNF repräsentiert wird, so wird f^δ durch eine (kanonische) KNF repräsentiert. Dasselbe gilt wenn DNF und KNF vertauscht werden. Dies folgt direkt aus dem Dualitätssatz.
Die Abbildung $f \mapsto f^\delta$ ist eine Bijektion von $\mathbf{B}_n$ auf sich selbst, denn es gilt $\delta^2 = id_{\mathbf{B}_n}$. Falls also jedes $f \in \mathbf{B}_n$ durch eine DNF repräsentiert wird, so auch durch eine KNF. Genauso gilt die Aussage mit DNF und KNF vertauscht.

Anwendung des Dualitätssatzes:
Als Anwendung de Dualitätssatzes wollen wir den Beweis von Satz 2.4 explizit zu Ende führen. Es ist also zu zeigen, dass auch die KNF

$$\beta := \bigwedge_{f(x_1,\ldots,x_n)=0} p_1^{\neg x_1} \vee \ldots \vee p_n^{\neg x_n}$$

die Boolesche Funktion f repräsentiert.
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\beta := \bigwedge_{f(x_1,\ldots,x_n)=0} p_1^{\neg x_1} \vee \ldots \vee p_n^{\neg x_n} &\equiv \left(\bigvee_{f(x_1,\ldots,x_n)=0} p_1^{\neg x_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{\neg x_n}\right)^\delta \\
&\equiv \left(\bigvee_{\neg f(x_1,\ldots,x_n)=1} p_1^{\neg x_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{\neg x_n}\right)^\delta \\
&\equiv \left(\bigvee_{f^\delta(x_1,\ldots,x_n)=1} p_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n}\right)^\delta
\end{aligned}
$$

Nach dem bereits gezeigten repräsentiert

$$\varphi := \bigvee_{f^\delta(x_1,\ldots,x_n)=1} p_1^{x_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{x_n}$$

die Funktion $f^\delta \in \mathbf{B}_n$. Da $\varphi^\delta \equiv \beta$ folgt mit dem Dualitätssatz, dass β die Funktion $(f^\delta)^\delta = f \in \mathbf{B}_n$ repräsentiert.

3 Tautologien und aussagenlogisches Folgern

Definition 3.1. Es sei $\alpha \in \mathcal{F}$ eine Formel und $X \subset \mathcal{F}$ eine Formelmenge.

- Eine Belegung w *erfüllt* die Formel α, falls $w\alpha = 1$. In Zeichen: $w \models \alpha$.
- Eine Belegung w heisst *Modell* für die Formelmenge X, wenn für alle $\alpha \in X$ $w \models \alpha$ gilt. Man schreibt: $w \models X$.
- Falls eine Belegung w existiert mit $w \models \alpha$ beziehungsweise $w \models X$, so heissen α beziehungsweise X *erfüllbar*.
- Die Relation $\models$ wird *Erfüllungsrelation* genannt.

Bemerkung 3.2. Die Erfüllungsrelation $\models$ hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} w \models p &\iff wp = 1 \quad (p \in AV)\,; & w \models \neg\alpha &\iff w \not\models \alpha \\ w \models \alpha \wedge \beta &\iff w \models \alpha \text{ und } w \models \beta\,; & w \models \alpha \vee \beta &\iff w \models \alpha \text{ oder } w \models \beta \end{aligned}$$

Für eine vorgegebene Belegung w kann $\models$ durch diese Eigenschaften auch rekursiv über den Formelaufbau definiert werden.

Bemerkung 3.3. Für $\alpha \in \mathcal{F}_n$ macht $w \models \alpha$ bereits Sinn, wenn w nur für die Variablen $p_1, \ldots, p_n$ festgelegt ist.

Definition 3.4. α heisst *allgemeingültig*, *logisch gültig* oder *2-wertige Tautologie*, falls $w \models \alpha$ für jede Belegung w. Notation: $\models \alpha$.
Eine nicht erfüllbare Formel wird *Kontradiktion* genannt.

Es gilt: $\alpha \equiv \beta \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta$.

Beispiel 3.5. Tautologien: $\top$, $\alpha \vee \neg\alpha$, $p \to p$
Kontradiktionen: $\bot$, $\alpha \wedge \neg\alpha$, $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$

Definition 3.6. Aus X folgt α *im aussagenlogischen Sinne*, wenn $w \models \alpha$ für jedes Modell w von X. Notation: $X \models \alpha$.

Bemerkung 3.7. Eine Formel α ist genau dann eine Tautologie, wenn α im aussagenlogischen Sinne aus $\emptyset$ folgt. Also: $\models \alpha \iff \emptyset \models \alpha$

Notation.

$$X \models \alpha, \beta :\Leftrightarrow X \models \alpha \text{ und } X \models \beta; \quad X \models Y :\Leftrightarrow \forall \beta \in Y : X \models \beta;$$
$$X, \alpha \models \beta :\Leftrightarrow X \cup \{\alpha\} \models \beta.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

$$\alpha \in X \implies X \models \alpha \qquad \text{(Reflexivität)}$$
$$X \models \alpha \;\&\; X \subset X' \implies X' \models \alpha \qquad \text{(Monotonie)}$$
$$X \models Y \;\&\; Y \models \alpha \implies X \models \alpha \qquad \text{(Transitivität)}$$

Beispiel 3.8 (Folgerungsbeziehungen). (i) $\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$ und $\alpha \wedge \beta \models \alpha, \beta$.

(ii) $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$ (denn $(1 \to x) = 1$ impliziert $x = 1$ für $x \in \{0, 1\}$).

(iii) $X \models \bot \implies \forall \alpha : X \models \alpha$.
Denn $X \models \bot$ kann nur gelten wenn X unerfüllbar ist, das heisst wenn X kein Modell hat.
Beispiel: $\{p, \neg p\} \models \bot$.

(iv) $X, \alpha \models \beta$ und $X, \neg\alpha \models \beta \implies X \models \beta$.
Sei $w \models X$.
Falls $w \models \alpha$ so folgt aus $X, \alpha \models \beta$ auch $w \models \beta$.
Falls $w \models \neg\alpha$ so folgt aus $X, \neg\alpha \models \beta$ auch $w \models \beta$.
Dies entspricht einem Beweis durch Fallunterscheidung.

Definition 3.9. Eine (aussagenlogische) *Substitution* ist eine Abbildung $\sigma : AV \to \mathcal{F}$, die sich wie folgt zu einer Abbildung $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ erweitern lässt:

$$(\alpha \wedge \beta)^\sigma = \alpha^\sigma \wedge \beta^\sigma, \quad (\alpha \vee \beta)^\sigma = \alpha^\sigma \vee \beta^\sigma, \quad (\neg\alpha)^\sigma = \neg\alpha^\sigma$$

Bemerkung 3.10. Substitutionen können auch als auf ganz $\mathcal{F}$ definierte Abbildungen, die durch ihre Einschränkung auf AV eindeutig bestimmt sind, aufgefasst werden.

Satz 3.11 (Substitutionsinvarianz).

$$X \models \alpha \implies X^\sigma \models \alpha^\sigma \qquad (X^\sigma := \{\varphi^\sigma \mid \varphi \in X\})$$

Beweis. Sei w eine Belegung und sei w^σ definiert durch $w^\sigma p := wp^\sigma$ (für $p \in AV$). Durch Formelinduktion beweisen wir

$$(\star) \qquad w \models \alpha^\sigma \iff w^\sigma \models \alpha$$

Nach Definition von w^σ trifft $(\star)$ auf Primformeln zu. Es gilt:

$$w \models (\alpha \wedge \beta)^\sigma \iff w \models \alpha^\sigma \wedge \beta^\sigma \iff w \models \alpha^\sigma, \beta^\sigma \iff w^\sigma \models \alpha, \beta \iff w^\sigma \models \alpha \wedge \beta$$

Für $\vee$ und $\neg$ geht man genauso vor. Damit ist $(\star)$ gezeigt.
Sei also $X \models \alpha$ und $w \models X^\sigma$.

$$(\star) \implies w^\sigma \models X \implies w^\sigma \models \alpha \overset{(\star)}{\implies} w \models \alpha^\sigma.$$

$\square$

Eigenschaften der Folgerungsrelation:
$X \models \alpha \implies X_0 \models \alpha$ für eine endliche Teilmenge $X_0 \subset X$.
Man sagt auch die Folgerungsrelation sei *finitär*. (Für einen Beweis siehe [1, S. 21] Satz 4.1).

Satz 3.12 (Deduktionstheorem)**.**

$$X, \alpha \models \beta \iff X \models \alpha \to \beta$$

Beweis. Sei $X, \alpha \models \beta$ und $w \models X$. Falls $w \models \alpha$ gilt, so gilt auf Grund von $X, \alpha \models \beta$ auch $w \models \beta$ (d.h. $w \models \alpha \to \beta$). Die Umkehrung wird analog gezeigt. □

Mit Hilfe de Deduktionstheorems kann das aussagenlogische Folgern aus einer *endlichen* Formelmenge auf die Überprüfung einer Tautologie reduziert werden, denn

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \iff \models \alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \beta \iff \models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta.$$

Umgekehrt kann man das Deduktionstheorem auch benutzen um Tautologien zu beweisen, zum Beispiel die Prämissenbelastung:

$$\models p \to q \to p \iff p \models q \to p \iff p, q \models p$$

Definition 3.13. Eine Formelmenge $X \subset \mathcal{F}$ heisst *deduktiv abgeschlossen*, wenn für alle $\alpha \in \mathcal{F}$ gilt:

$$X \models \alpha \implies \alpha \in X.$$

Klarerweise ist der Durchschnitt von deduktiv abgeschlossenen Mengen selbst deduktiv abgeschlossen. Es ist also jedes $X \subset \mathcal{F}$ in einer kleinsten deduktiv abgeschlossenen Obermenge enthalten. $\mathcal{F}$ und die Menge aller Tautologien sind deduktiv abgeschlossen. Für $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ ist $\{\alpha \wedge \beta\}$ nicht deduktiv abgeschlossen, denn $\{\alpha \wedge \beta\} \models \alpha$.

Literatur

[1] Wolfgang Rautenberg. *Einführung in die Mathematische Logik*. Vieweg-Teubner, 2008. 3., überarbeitete Auflage.