Syntaktisches Folgern und Korrektheit

Merlin Bärtschi

April 3, 2012

Dieser Text ist eine leicht veränderte Exposition des Abschnittes 3.1 aus [1]. Es wird dieselbe Notation verwendet wie in den bisherigen Vorträgen, bis auf das Symbol $\vdash$, das sogleich neu definiert wird.

Wie in der Aussagenlogik, wollen wir eine formale Definition des Beweisens in Form eines Kalküls finden, die dem semantischen Folgerungsbegriff, diesmal der Prädikatenlogik, entspricht.

Definition 1. Sei $\mathcal{L}$ eine elementare Sprache. Wir betrachten wieder Sequenzen, also Paare (X, α), wobei X eine Formelmenge und α eine Formel der elementaren Sprache $\mathcal{L}$ ist. Der Kalkül $\vdash$ ist eine Relation auf $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ - wobei $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ die Potenzmenge von $\mathcal{L}$ bezeichne, die auf den folgenden Basisregeln basiert:

(AR) $\frac{}{X \vdash \alpha}$ $(\alpha \in X \cup \{t = t\})$

(MR) $\frac{X \vdash \alpha}{X' \vdash \alpha}$ $(X \subseteq X')$

($\wedge$1) $\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta}$

($\wedge$2) $\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha, \beta}$

($\neg$1) $\frac{X \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha}$

($\neg$2) $\frac{X, \beta \vdash \alpha \mid X, \neg\beta \vdash \alpha}{X \vdash \alpha}$

($\forall$1) $\frac{X \vdash \forall x \alpha}{X \vdash \alpha \frac{t}{x}}$ $(\alpha, \frac{t}{x}$ kollisionsfrei)

($\forall$2) $\frac{X \vdash \alpha \frac{y}{x}}{X \vdash \forall x \alpha}$ $(y \notin \text{frei}(X) \cup \text{var}(\alpha))$

(=) $\frac{X \vdash s=t, \alpha\frac{s}{x}}{X \vdash \alpha\frac{t}{x}}$ (α Primformel)

Dabei nennen wir die Sequenzen im "Zähler" Prämissen, die Sequenzen im "Nenner" Konklusionen.

Eine Formel α "folgt aus" der Formelmenge X, geschrieben $X \vdash \alpha$ genau dann, wenn es eine endliche Folge von Sequenzen $(S_0, \ldots, S_n)$ gibt, so dass $S_n = (X, \alpha)$ und für jedes $0 \leq i \leq n$ trifft einer der folgenden beiden Fälle zu:

1) $S_i = (X, \alpha)$ mit $\alpha \in X \cup \{t = t\}$.
2) Es gibt $j_1, \ldots j_m$ sodass $j_k < i$ für alle $1 \leq k \leq m$ und es gibt eine Basisregel, sodass $S_{j_1}, \ldots S_{j_m}$ die Prämissen sind und S_i eine Konklusion der Basisregel.

Die Folge $(S_0, \ldots, S_n)$ nennt man Beweis von S_n.

Die Relation $\vdash$ wird einen "Kalkül des natürlichen Schliessens" genannt, da er den Folgerungsbegriff, wie er in der Mathematik verwendet wird, gut modelliert. In einem späteren Vortrag wird der Vollständigkeitssatz für diesen Kalkül bewiesen werden. Dieser sagt aus, dass dieser Kalkül dem semantischen Folgerungsbegriff entspricht, das heisst $X \vdash \alpha \Leftrightarrow X \models \alpha$.

Bemerkung 2. Die Basisregel (=) könnte auch für alle Formeln α gefordert werden, für die sowohl α und $\frac{t}{x}$ als auch α und $\frac{s}{x}$ kollisionsfrei sind. Auch dann wäre die Regel im semantischen Sinne korrekt, was wir wollen und brauchen, damit der Vollständigkeitssatz gilt.

Bemerkung 3. Da dieser Kalkül alle Basisregeln des aussagenlogischen Kalküls aus dem Vortrag "Aussagenlogischer Kalkül, Vollständigkeitssatz" beinhaltet, gelten alle dort hergeleiteten Regeln auch in diesem Kalkül. Der Beweis der Regeln ist derselbe wie dort, da alle dabei verwendeten Basisregeln auch hier verwendet werden dürfen.

Auch hier haben wir wieder

Satz 4 (Beweisprinzip durch Regelinduktion)**.** Sei $\mathcal{E}$ eine Relation auf $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ (solche Relationen nennen wir auch Eigenschaften), sodass gilt:

(o) $\mathcal{E}(X, \alpha)$ für $\alpha \in X$ oder α von der Form $t = t$

(m) $\mathcal{E}(X, \alpha) \Rightarrow \mathcal{E}(X', \alpha)$ für $X \subseteq X'$

($\wedge$ a) $\mathcal{E}(X, \alpha), \mathcal{E}(X, \beta) \Rightarrow \mathcal{E}(X, \alpha \wedge \beta)$

($\wedge$ b) $\mathcal{E}(X, \alpha \wedge \beta) \Rightarrow \mathcal{E}(X, \alpha), \mathcal{E}(X, \beta)$

(¬ a) $\mathcal{E}(X,\beta)$, $\mathcal{E}(X,\neg\beta) \Rightarrow \mathcal{E}(X,\alpha)$

(¬ b) $\mathcal{E}(X \cup \{\beta\},\alpha)$, $\mathcal{E}(X \cup \{\neg\beta\},\alpha) \Rightarrow \mathcal{E}(X,\alpha)$

(∀ a) $\mathcal{E}(X,\forall x\alpha) \Rightarrow \mathcal{E}(X,\alpha\frac{t}{x})$ für α und $\frac{t}{x}$ kollisionsfrei.

(∀ b) $\mathcal{E}(X,\alpha\frac{y}{x}) \Rightarrow \mathcal{E}(X,\forall x\alpha)$ für $y \notin \text{frei}(X) \cup \text{var}(\alpha)$

(e) $\mathcal{E}(X, s = t), \mathcal{E}(X,\alpha\frac{s}{x}) \Rightarrow \mathcal{E}(X,\alpha\frac{t}{x})$ für α Primformel

Dann gilt $X \vdash \alpha \Rightarrow \mathcal{E}(X,\alpha)$

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über die Länge eines Beweises von $X \vdash \alpha$. Sei $X \vdash \alpha$. Dann existiert ein Beweis $(S_0, \dots S_n)$ von $(X,\alpha) = S_n$.

Für die Verankerung $n = 0$ betrachten wir einen Beweis (S_0) der Länge 0. Da es keine vorhergehenden Sequenzen gibt, muss S_0 aus der Anfangsregel entstanden sein und hat somit die Form (X,α) wobei $\alpha \in X$ oder α von der Form $t = t$. Nach (o) gilt also $\mathcal{E}(X,\alpha)$ und die Induktionsverankerung ist gemacht.

Für den Induktionsschritt, nehmen wir an, dass die Aussage für alle Beweise mit Länge $< n$ stimmt. Sei $(S_0, \dots, S_n)$ ein Beweis von $S_n = (X,\alpha)$ der Länge n. Falls $\alpha \in X$ oder α von der Form $t = t$ ist, so gilt wieder nach (o) $\mathcal{E}S_n$. Andernfalls betrachten wir $(S_0, \dots S_l)$ für $l < n$. Dies ist ein Beweis von S_l der Länge $l < n$. Nach Induktionsannahme gilt somit $\mathcal{E}S_l$ für alle $l < n$. Ausserdem gibt es $i_1, \dots, i_k < n$ sodass $S_{i_1}, \dots S_{i_k}$ die Prämissen einer Basisregel bilden, deren Konklusion die Sequenz S_n enthält. Nach einer der Annahmen der Regelinduktion erhalten wir nun $\mathcal{E}S_{i_1} \dots \mathcal{E}S_{i_k} \Rightarrow \mathcal{E}S_n$ was den Induktionsschritt und den Beweis beendet. □

Mit Hilfe der Regelinduktion erhalten wir die Korrektheit des Kalküls.

Korollar 5. Für alle X, α gilt $X \vdash \alpha \Rightarrow X \models \alpha$

Beweis. Wir definieren eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ durch: $\mathcal{E}(X,\alpha)$ genau dann, wenn $X \models \alpha$. Wir wollen zeigen, dass diese Eigenschaft die Voraussetzungen der Regelinduktion erfüllt. Für die ersten 6 Voraussetzungen ist der Beweis derselbe wie in Salomes Vortrag "Aussagenlogischer Kalkül, Vollständigkeitssatz". Die Voraussetzungen (∀a) und (e) sind gerade die Aussage von Korollar 1.1 von Fabians Vortrag "Russelsche Antinomie, Folgerungseigenschaften, Theoriebegriff".

Die Voraussetzung (∀b) ist ausgeschrieben $X \models \alpha\frac{y}{x} \Rightarrow X \models \forall x\alpha$, wobei $y \notin \text{frei}(X) \cup \text{var}(\alpha)$. Wegen Korollar 12 des Vortrags "Semantik elementarer Sprachen" von Tobias erhalten wir $\alpha\frac{y}{x} \models \forall y\alpha\frac{y}{x}$. Da $y \notin \text{frei}(X) \cup \text{var}(\alpha)$, ist $\alpha\frac{y}{x} \equiv \alpha$. Somit gilt $\alpha\frac{y}{x} \models \forall x\alpha$, woraus (∀b) folgt. Mit Regelinduktion folgt das Korollar. □

Korollar 6. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ eine Spracherweiterung. Dann gilt $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \vdash_{\mathcal{L}'}$.

Beweis. Sei $\mathcal{E}$ die Eigenschaft in $\mathcal{P}(\mathcal{L})\times\mathcal{L}$, die definiert ist durch $\mathcal{E}(X,\alpha)$ genau dann, wenn $X \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$. Es ist zu zeigen, dass diese Eigenschaft die Voraussetzungen der Regelinduktion erfüllt.

Zum Beweis von (o), betrachten wir Sequenzen (X,α), sodass $\alpha \in X$, oder α von der Form $t = \ t$. In diesem Fall ist die Folge von Sequenzen, die nur aus der Sequenz (X,α) besteht, ein Beweis von $X \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$. Somit ist (o) bewiesen.

Die übrigen Eigenschaften werden alle nach dem gleichen Vorgehen bewiesen. Wir betrachten exemplarisch die Eigenschaft (m).

Zum Beweis von (m) nehmen wir an, dass $\mathcal{E}(X,\alpha)$, das heisst $X \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$. Folglich gibt es einen Beweis, das heisst eine Folge von Sequenzen $(S_0,\ldots,S_n)$ mit den Eigenschaften aus Definition 1. Unter Anwendung von (MR) erhalten wir, dass für $X' \supseteq X$ die Sequenzenfolge $(S_0,\ldots,S_n,(X',\alpha))$ ein Beweis von $X' \vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$ ist. Somit gilt $\mathcal{E}(X',\alpha)$ für alle $X' \supseteq X$.

Der Beweis der übrigen Eigenschaften verwendet dasselbe Vorgehen wie der Beweis von (m). Man wähle eine der Voraussetzungen und betrachte die Prämissen $(P_1,\ldots P_k)$ der zur Eigenschaft korrespondierenden Basisregel. Falls $P_1,\ldots P_k \in \vdash_{\mathcal{L}'}$, so gibt es für jede Sequenz P_i einen Beweis $B_i = (S_{i1},\ldots,S_{in_i})$ wobei $1 \le i \le k$. Sei nun K eine Konklusion der korrespondierenden Basisregel. Die Aneinanderreihung dieser Beweise zu einer grossen Folge $(S_{11},\ldots,S_{kn_k},K)$, an deren Ende K angefügt wird, ist ein Beweis von K. Der letzte Schritt kann durchgeführt werden, weil jede der Prämissen der korrespondierenden Basisregel gerade die letzte Sequenz in einem der Beweise B_i ist. Somit kann im letzten Schritt die korrespondierende Basisregel angewendet werden, um K zu folgern.

Zusammengefasst gilt somit $\mathcal{E}(P_1),\ldots\mathcal{E}(P_n) \Leftrightarrow P_1,\ldots P_n \in \vdash_{\mathcal{L}'} \Rightarrow K \in \vdash_{\mathcal{L}'} \Leftrightarrow \mathcal{E}(K)$ für jede Konklusion K der korrespondierenden Basisregel. Somit ist die gewählte Eigenschaft erfüllt und nach der Regelinduktion folgt $X \vdash_{\mathcal{L}} \alpha \Rightarrow \mathcal{E}(X,\alpha)$, was zu zeigen war. □

Wie schon in der Aussagenlogik, gilt

Satz 7 (Endlichkeitssatz)**.** Wenn $X \vdash \alpha$, dann gibt es eine endliche Formelmenge $X_0 \subseteq X$ sodass $X_0 \vdash \alpha$.

Es gilt sogar, dass wenn $X \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$ dass es dann ein $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ mit endlicher Signatur und eine endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$ gibt, sodass $X_0 \vdash_{\mathcal{L}_0} \alpha$.

Beweis. Der Beweis geht über Regelinduktion. Sei $\mathcal{E}(X,\alpha)$ die Eigenschaft, dass es endliche $X_0 \subseteq X$ und $L_0 \subseteq L$ gibt, sodass $X_0 \vdash_{\mathcal{L}_0} \alpha$. Dabei bezeichne L die Signatur von $\mathcal{L}$ und L_0 die Signatur von $\mathcal{L}_0$.

Wieder müssen wir zeigen, dass die Voraussetzungen für die Regelinduktion erfüllt sind. Wir zeigen exemplarisch die Eigenschaften (o), ($\wedge$ 1) und ($\forall$1).

Falls $\alpha \in X$, so können wir $X_0 = \{\alpha\}$ und $\mathcal{L}_0$ als die Menge aller in α auftretenden nichtlogischen Symbole wählen. Dann gilt $X_0 \vdash_{\mathcal{L}_0} \alpha$. Falls α von der Form $t = t$ ist, so gilt $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}_0} \alpha$ für dasselbe $\mathcal{L}_0$ wie zuvor. Folglich können wir in diesem Fall $X_0 = \phi$ wählen. Damit ist (o) gezeigt.

Zum Beweis von ($\wedge$a) nehmen wir an, dass es endliche $X_1, X_2 \subseteq X$ und $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}$ gibt, sodass $X_1 \vdash_{\mathcal{L}_1} \alpha$ und $X_2 \vdash_{\mathcal{L}_2} \beta$. Wenn wir $X_0 := X_1 \cup X_2$ und $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ setzen, erhalten wir dank der Monotonieregel und Korollar 2, dass $X_0 \vdash_{\mathcal{L}_0} \alpha, \beta$ Mit der Basisregel ($\wedge$ 1) erhalten wir, dass $X_0 \vdash_{\mathcal{L}_0} \alpha \wedge \beta$. Da X_0 und $\mathcal{L}_0$ endlich sind, gilt also $\mathcal{E}(X, \alpha \wedge \beta)$ und somit ist die Eigenschaft ($\wedge$1) gezeigt.

Zum Beweis von ($\forall$a) nehmen wir an, dass es ein endliches $X_0 \subseteq X$ und ein endliches $L_0 \subseteq L$ gibt, sodass $X_0 \vdash_{\mathcal{L}_0} \forall x\alpha$. Nach der Basisregel ($\forall$1) gilt somit auch $X_0 \vdash_{\mathcal{L}_0} \alpha\frac{t}{x}$, für α und $\frac{t}{x}$ kollisionsfrei. Somit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{E}(X, \forall x\alpha) \Rightarrow \mathcal{E}(X, \alpha\frac{t}{x})$. Dies ist die Eigenschaft($\forall$a).

Die übrigen Eigenschaften werden ähnlich gezeigt. Mit Regelinduktion folgt die Behauptung. □

Zum Schluss betrachten wir noch einige nützliche Regeln und Sequenzen, die aus diesem Kalkül gewonnen werden können.

Proposition 8. Für alle Formelmengen X, Terme $s, t, t', t_1, \ldots t_n, t'_1, \ldots, t'_n$, Operationssymbole f und Relationssymbole r gilt

a) $\frac{X \vdash s=t, s=t'}{X \vdash t=t'}$

b) $\frac{X \vdash s=t}{X \vdash t=s}$

c) $\frac{X \vdash t=s, s=t'}{X \vdash t=t'}$

d) $\frac{X \vdash t_i=t}{X \vdash f\vec{t}=ft_1 \ldots t_{i-1}tt_{i+1} \ldots t_n}$

e) $\frac{X \vdash t_1=t'_1, \ldots, t_n=t'_n}{X \vdash f\vec{t}=f\vec{t'}}$

f) $\frac{X \vdash t_i=t, r\vec{t}}{X \vdash rt_1 \ldots t_{i-1}tt_{i+1} \ldots t_n}$

g) $\frac{X \vdash t_1=t'_1 \ldots t_n=t'_n, r\vec{t}}{X \vdash r\vec{t'}}$

h) $\vdash \exists x\ t = x$ für alle x, t mit $x \notin var(t)$

i) $\vdash \exists x\ x = x$

Beweis. a) Wähle eine Variable $x \notin \mathrm{var}(t')$ und definiere die Formel α als $x = t'$. Somit ist die Prämisse $X \vdash s = t, s = t'$ von a) gerade dasselbe wie $X \vdash s = t, \alpha\frac{s}{x}$, was die Prämisse der Regel (=) ist. Die Konklusion von Regel (=) ist $X \vdash \alpha\frac{t}{x}$ was für das gewählte α gerade der Konklusion von a) entspricht.

b) 1) $X \vdash s = s$ nach (AR)

	2) $X \vdash s = t$	nach Annahme
	3) $X \vdash t = s$	nach a)

Im letzten Schritt wurde das Regelschema a) angewendet, wobei man für den Term t' denselben Term wählt wie für den Term s.

c)	1) $X \vdash t = s$	nach Annahme
	2) $X \vdash s = t'$	nach Annahme
	3) $X \vdash s = t$	nach b) angewandt auf 1)
	4) $X \vdash t = t'$	nach a) angewandt auf 2) und 3)

d) Wähle eine Varibale $x \notin \bigcup_{i=1}^{n}$ var(t_i) und setze $\alpha := f\vec{t} = ft_1 \ldots t_{i-1}xt_{i+1} \ldots t_n$. Dann ist $\alpha\frac{t_i}{x} = f\vec{t} = f\vec{t}$ und somit $X \vdash \alpha\frac{t_i}{x}$ nach (AR). Da nach Annahme $X \vdash t_i = t$, erhalten wir mit der Regel $(=\ )$ die Sequenz $X \vdash \alpha\frac{t}{x}$. Diese ist gerade die Konklusion von d).

e) Durch n-fache Anwendung von d), wobei man für den Term t t_i' wählt, können die Terme t_i sukzessive durch die Terme t_i' ersetzt werden. Durch Anwendung von c) auf die resultierenden Formeln der Form $ft_1' \ldots t_{i-1}'t_i \ldots t_n = ft_1' \ldots t_i't_{i+1} \ldots t_n$ folgt die Konklusion von e).

f) Wähle eine Variable $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$ und setze $\alpha := rt_1 \ldots t_{i-1}xt_{i+1} \ldots t_n$. Dann ist $\alpha\frac{t_i}{x} = r\vec{t}$ und somit besagt die Annahme $X \vdash \alpha\frac{t_i}{x}$. Mit der Regel $(=\ )$ erhalten wir $X \vdash \alpha\frac{t}{x}$ was gerade der Konklusion von f) entspricht.

g) Analog zum Beweis von e) folgen aus n-facher Anwendung der Regel f) sukzessive die Sequenzen $X \vdash rt_1' \ldots t_{i-1}'t_i \ldots t_n$. Die letzte dieser Sequenzen ist gerade die Konklusion von g)

h)	1 $\forall xt \neq x \vdash \forall xt \neq x$	nach (AR)
	2 $\forall xt \neq x \vdash (t \neq x)\frac{t}{x}$	nach ($\forall$1) (beachte dass $x \notin var(t)$)
	3 $\forall xt \neq x \vdash t = t$	nach (AR) und (MR)
	4 $\forall xt \neq x \vdash \exists xt = x$	nach ($\neg$1) auf 2 und 3
	5 $\neg\forall xt \neq x \vdash \exists xt = x$	nach (AR)
	6 $\vdash \exists xt = x$	nach ($\neg$2)

Analog zu h) beweist man i), wobei man anstelle von $\frac{t}{x}$ die Substitution $\frac{x}{x}$ verwendet.

$\square$

Definition 9. Eine Formelmenge $X \subseteq \mathcal{L}$ heisst *syntaktisch inkonsistent*, falls für alle $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt $X \vdash \alpha$.

Sonst heisst X *syntaktisch konsistent.*

Jede erfüllbare Formelmenge ist syntaktisch konsistent. (Erfüllbar bedeutet, dass es ein Modell $\mathcal{M}$ von $\mathcal{L}$ gibt, sodass für alle $\alpha \in X$ gilt $\mathcal{M} \models \alpha$.) Wegen der Regel $(\neg 1)$ ist X syntaktisch inkonsistent genau dann wenn für eine beliebige Formel α gilt $X \vdash \alpha, \neg\alpha$.

Wir können auch das falsum definieren durch $\bot := \neg\exists v_0\ v_0 = v_0)$ für eine Variable v_0. Nach i) aus der Proposition oben $X \vdash \bot$ genau dann wenn X syntaktisch inkonsistent ist.

Mit dieser Definition des falsum erhalten wir, wie für den Kalkül der Aussagenlogik, das folgende

Lemma 10.

$$C^+ \ :\ X \vdash \alpha \Leftrightarrow X, \neg\alpha \vdash \bot$$

$$C^- \ :\ X \vdash \neg\alpha \Leftrightarrow X, \alpha \vdash \bot$$

Beweis. Der Beweis ist derselbe wie in der Aussagenlogik. Wir zeigen hier nur C^+. C^- geht ganz analog. Man ersetze im Beweis einfach α durch $\neg\alpha$ und $\neg\alpha$ durch α.

Der Beweis von C^+ geht wie folgt:

" $\Rightarrow$ "	1	$X \vdash \alpha$	nach Annahme
	2	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	nach (MR)
	3	$X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	nach (AR)
	4	$X, \neg\alpha \vdash \bot$	nach $(\neg 2)$ für $\beta = \bot$

" $\Leftarrow$ "	1	$X, \neg\alpha \vdash \bot$	nach Annahme.
	2	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	da $X, \neg\alpha$ syntaktisch inkonsistent ist.
	3	$X, \alpha \vdash \alpha$	nach (AR) und (MR)
	4	$X \vdash \alpha$	nach $(\neg 1)$

□

Literatur

W.Rautenberg; *Einführung in die Mathematische Logik*; Vieweg-Teubner, 2008