VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

ALEXANDER HEINDL

Dieser Text ist eine geringfügig veränderte Exposition des Abschnittes 3.2 aus [1]. Wenn nicht anders vermerkt entspricht die Notation derjenigen der vorangegangenen Vorträge.

Ziel dieses Vortrages ist es, für den im Vortrag *Syntaktisches Folgern und Korrektheit* vorgestellten Kalkül des natürlichen Schließens die Vollständigkeit, also Gültigkeit von $X \vdash \alpha \Leftrightarrow X \vDash \alpha$ für alle Formelmengen X und Formeln α, wobei "$\vDash$" die Erfüllungsrelation aus dem Vortrag *Semantik elementarer Sprachen* ist. Die Richtung $X \vdash \alpha \Rightarrow X \vDash \alpha$ wurde schon im vorherigen Vortag gezeigt, und nun wollen wir die Gegenrichtung mithilfe von bestimmten Konstantenerweiterungen und sogenannten Henkin-Mengen beweisen.

Wir werden die folgenden Eigenschaften des Kalküls "$\vdash$" aus dem Vortrag *Syntaktisches Folgern und Korrektheit* im Laufe des Beweises an verschiedenen Stellen verwenden:

Bemerkung 1 (Proposition 8 vom Vortrag *Syntaktisches Folgern und Korrektheit*). Für alle Formelmengen X, Terme s, t, t', $t_1, \ldots, t_n$, $t'_1, \ldots, t'_n$, Operationssymbole f und Relationssymbole r gilt

a) $\frac{X \vdash s=t,\ s=t'}{X \vdash t=t'}$
b) $\frac{X \vdash s=t}{X \vdash t=s}$
c) $\frac{X \vdash t_1=t'_1,\ \ldots,\ t_n=t'_n}{X \vdash f\vec{t}=f\vec{t'}}$
d) $\frac{X \vdash t_1=t'_1,\ \ldots,\ t_n=t'_n,\ r\vec{t}}{X \vdash r\vec{t'}}$
e) $\vdash \exists x\ t = x$ für alle x, t mit $x \notin var(t)$

1. Konstantenexpansion

Definition 2 (Konstantenexpansion)**.** Sei L die zur elementaren Sprache $\mathcal{L}$ zugehörige Signatur und c ein Konstantensymbol welches noch nicht in L vorkommt, dann nennen wir $\mathcal{L}c$ die aus $\mathcal{L}$ hervorgehende elementare Sprache mit der Signatur $L \cup \{c\}$ (und gleichem Träger wie $\mathcal{L}$). Für eine Menge C von Konstantensymbolen definieren wir analog $\mathcal{L}C$.

Sei im folgenden $\mathcal{L}$ eine elementare Sprache, C bezeichne eine beliebig große Menge von Konstantensymbolen und sei $c \in C$.

Lemma 3. *Wenn $X \vdash_{\mathcal{L}c} \alpha$, dann gilt auch für fast alle Variablen z, dass $X\frac{z}{c} \vdash_{\mathcal{L}} \alpha\frac{z}{c}$.*

Beweis. Regelinduktion in $\vdash_{\mathcal{L}c}$ über die Eigenschaft *"für fast alle Variablen z gilt...*:
Wenn $\alpha \in X$ ist, dann ist auch $\alpha\frac{z}{c} \in X\frac{z}{c}$ für z beliebig. Gleichsam, wenn α von der Form $t = t$ ist, dann ist auch $\alpha\frac{z}{c}$ von der Form $t = t$.
Die Induktionsschritte für (m), $(\wedge\ a)$ bis $(\neg\ b)$ sind klar, nur $(\forall\ a)$, $(\forall\ b)$ und (e) sind nicht unmittelbar ersichtlich.
$(\forall\ a)$: Sei $X\frac{z}{c} \vdash_{\mathcal{L}} (\forall x\alpha)\frac{z}{c}$ für fast alle Variablen z gemäß Induktionsannahme, α, $\frac{t}{x}$ kollisionsfrei, und o.B.d.A. $z \notin \forall x\alpha$, t.

Wir können nun $\alpha' := \alpha\frac{z}{c}$ und $t' := t\frac{c}{z}$ definieren, dann haben wir, dass $\alpha\frac{t}{x}\frac{z}{c} = \alpha'\frac{t'}{x}$. Also ist $(\forall x\alpha)\frac{z}{c} = \forall x\alpha'$, und nach ($\forall$1) folgt aus $X\frac{z}{c} \vdash_{\mathcal{L}} \forall x\alpha'$, dass $X\frac{z}{c} \vdash_{\mathcal{L}} \alpha'\frac{t'}{x}$, somit auch $X\frac{z}{c} \vdash_{\mathcal{L}} \alpha\frac{t}{x}\frac{z}{c}$.
(($\forall$ b) und (e) verlaufen analog.) □

Korollar 4 (Konstantenquantifizierung). *Aus Lemma 3 folgt*

$$(\forall 3)\quad \frac{X \vdash \alpha\frac{c}{x}}{X \vdash \forall x\alpha} \qquad (c \text{ nicht in } X,\ \alpha).$$

Beweis. Sei $X \vdash \alpha\frac{c}{x}$ und c kommt nicht in X und α vor. Wegen des Endlichkeitssatzes (Satz 7 vom Vortrag *Syntaktisches Folgern und Korrektheit*) können wir annehmen, dass X endlich ist, sodann können wir eine Variable y finden welche noch nicht in X und α vorkommt und Lemma 3 mit $\mathcal{L}c = \mathcal{L}$ anwenden:

$$\frac{X \vdash_{\mathcal{L}c} \alpha\frac{c}{x}}{X\frac{y}{c} \vdash_{\mathcal{L}} \alpha\frac{c}{x}\frac{y}{c} = \alpha\frac{y}{x}} \qquad \text{nach Lemma 3.}$$

Weil $X\frac{y}{c} = X$ (c kommt nicht in X vor) haben wir

$$\frac{X \vdash \frac{y}{x}}{X \vdash \forall x\alpha} \qquad \text{nach } (\forall 2).$$

□

Lemma 5. *Für alle $X \subseteq \mathcal{L}$ und $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt $X \vdash_{\mathcal{L}} \alpha \Leftrightarrow X \vdash_{\mathcal{L}C} \alpha$.*

Beweis. Die Richtung "$\Rightarrow$" folgt aus der Monotonie bezüglich Spracherweiterungen (*Korollar 6* des Vortrages *Syntaktisches Folgern und Korrektheit*). Sei nun $X \vdash_{\mathcal{L}C} \alpha$, dann existiert eine Herleitung $(S_0, \dots, S_k)$ für die Formel α aus X. Nachdem eine Herleitung nur endliche Länge hat, und somit nur eine endliche Teilmenge von Konstanten $C' := C \cap \{S_0, \dots, S_k\}$ darin vorkommen kann, können wir den Beweis induktiv über $n := |C'|$ führen. Für die *Induktionsbasis* $n = 0 = |C|$ folgt trivialerweise $X \vdash_{\mathcal{L}C} \alpha \Rightarrow X \vdash_{\mathcal{L}} \alpha$, da $\mathcal{L}C = \mathcal{L}$. Für den *Induktionsschritt* $0 < n = |C|$ müssen wir nun zeigen, dass $X \vdash_{\mathcal{L}C} \alpha \Rightarrow X \vdash_{\mathcal{L}C\setminus\{c\}} \alpha$ für ein $c \in C$. Nach Lemma 3 existiert mindestens eine Variable z sodass $X\frac{z}{c} \vdash_{\mathcal{L}C\setminus\{c\}} \alpha\frac{z}{c}$, also können wir $X \vdash_{\mathcal{L}C\setminus\{c\}} \alpha$ schreiben, weil $X \subseteq \mathcal{L}$ und $\alpha \in \mathcal{L}$, und dementsprechend die Konstante c in X und α nicht vorkommt. □

Bemerkung 6. Wir bezeichnen im folgenden die Ableitungsrelation in $\mathcal{L}$ und jene in einer beliebigen Konstantenexpansion $\mathcal{L}C$ von $\mathcal{L}$ mit dem gleichen Symbol "$\vdash$". Wegen Lemma 5 können daraus keine Missverständnisse entstehen. Weil die Konsistenz von X gleichwertig ist mit $X \vdash \bot$, muss auch nicht zwischen der Konsistenz von $X \in \mathcal{L}$ bezüglich $\mathcal{L}$ oder $\mathcal{L}C$ unterschieden werden.

Definition 7. Wir wählen für jede Variable x und jedes $\alpha \in \mathcal{L}$ eine noch nicht in $\mathcal{L}$ vorhandene Konstante $c_{x,\alpha}$ und definieren die Formel

$$\alpha^x := \neg\forall x\alpha \wedge \alpha\frac{c_{x,\alpha}}{x}\ .$$

Lemma 8. *Sei $\Gamma_{\mathcal{L}} := \{\neg\alpha^x \mid \alpha \in \mathcal{L},\ x \in Var\}$. Für jede konsistente Formelmenge $X \subseteq \mathcal{L}$ ist dann auch $X \cup \Gamma_{\mathcal{L}}$ konsistent.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $X \cup \Gamma_{\mathcal{L}} \vdash \bot$. Dann existieren für ein minimal gewähltes n Formeln $\neg\alpha_0^{x_0}, \dots, \neg\alpha_n^{x_n} \in \Gamma_{\mathcal{L}}$ mit
a) $X \cup \{\neg\alpha_i^{x_i} \mid i \leq n\} \vdash \bot$
b) $X \cup \{\neg\alpha_i^{x_i} \mid i < n\} \nvdash \bot$.
Fortan bezeichnen wir $X' := X \cup \{\neg\alpha_i^{x_i} \mid i < n\}$, $x := x_n$, $\alpha := \alpha_n$ und $c := c_{x,\alpha}$.
(1) $X', \neg\alpha^x \vdash \bot$ nach Annahme
(2) $X' \vdash \alpha^x$ nach C^+

(3) $X' \vdash \neg\forall x\alpha,\, \alpha\frac{c}{x}$ nach der Definition von α^x und $(\wedge 2)$, jedoch
(4) $\frac{X' \vdash \alpha\frac{c}{x}}{X' \vdash \forall x\alpha}$ nach $(\forall 3)$, somit
(5) $X' \vdash \neg\forall x\alpha,\, \forall x\alpha,$ im Widerspruch zu b).

□

2. Henkin-Mengen

Definition 9. Eine Formelmenge $X \subseteq \mathcal{L}$ ist eine *Henkin-Menge*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:
(H1) $X \vdash \neg\alpha \Leftrightarrow X \nvdash \alpha$
(H2) $X \vdash \forall x\alpha \Leftrightarrow X \vdash \alpha\frac{c}{x}$ für alle Konstanten c in $\mathcal{L}$

Bemerkung 10. Aus $(H1)$ und $(H2)$ folgt für jede Henkin-Menge $X \subseteq \mathcal{L}$ die folgende nützliche Eigenschaft

$$(H3) \quad \text{Zu jedem Term } t \text{ gibt es eine Konstante } c \text{ mit } X \vdash t = c.$$

Beweis. Von Bemerkung 1e) wissen wir, dass $X \vdash \exists x t = x$, folglich $X \vdash \neg\forall x t \neq x$. Aus $(H1)$ folgt dann $X \nvdash \forall x t \neq x$, nach $(H2)$ haben wir $X \vdash (t \neq x)\frac{c}{x}$ für nicht alle Konstanten c in $\mathcal{L}$ (insbesondere folgt daraus auch, dass die Signatur von $\mathcal{L}$ Konstanten enthalten muss). Also existiert eine Konstante c', so dass gilt $X \nvdash (t \neq x)\frac{c'}{x}$. Mit $(H1)$ wiederum ergibt sich nun $X \vdash t = c'$. □

Lemma 11. *Für jede konsistente Formelmenge $X \subseteq \mathcal{L}$ gibt es eine Henkin-Menge $Y \supseteq X$ in einer Konstantenexpansion $\mathcal{L}C$ von $\mathcal{L}$.*

Beweis. Seien $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}$, $X_0 := X$. Für $n \geq 0$ definieren wir induktiv $\mathcal{L}_{n+1} := \mathcal{L}_n C_n$ wobei $C_n := \{c_{x,\alpha,n} \mid x \in Var,\, \alpha \in \mathcal{L}_n\}$ und $X_{n+1} := X_n \cup \Gamma_{\mathcal{L}_n}$. Aus Lemma 8 folgt dann $X_n \nvdash \bot$ für alle $n \geq 0$. Sei $U := \bigcup_{n\geq 0} X_n$ und $\mathcal{L}C := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{L}_n$, also $U \subseteq \mathcal{L}C$ und $U \nvdash \bot$. Aufgrund dieser Konstruktion ist für jedes $\alpha \in \mathcal{L}_n \subseteq \mathcal{L}C$ die Formel $\neg\alpha^x \in X_{n+1} \subseteq U$ enthalten. Sei $(H, \subseteq)$ die Halbordnung aller konsistenten Erweiterungen von U in $\mathcal{L}C$. Für jede Kette K konsistenter Mengen ist auch die obere Schranke $\bigcup K$ konsistent: Angenommen, $\bigcup K \vdash \bot$, dann existiert nach dem Endlichkeitssatz (*Satz 7* des Vortrages *Syntaktisches Folgern und Korrektheit*) eine endliche Formelmenge $X_0 \subset \bigcup K$ so, dass $X_0 \vdash \bot$. Da X_0 endlich ist, existiert ein Kettenglied $K_i \supset X_0$, nach (MR) folgt also $K_i \vdash \bot$, im Widerspruch zur Konsistenz von K_i. Weil $U \in H$ ist H nicht leer, also enthält H nach dem Zorn'schen Lemma eine maximal konsistente Obermenge $Y \supseteq U$. Dieses Y ist auch eine Henkin-Menge:
(H1) "$\Rightarrow$": Aus $Y \vdash \neg\alpha$ folgt wegen der Konsistenz von Y schon $Y \nvdash \alpha$.
"$\Leftarrow$":
(1) Aus $Y \nvdash \alpha$ folgt $\alpha \notin Y$ nach (AR)
(2) $Y, \alpha \vdash \bot$ wegen maximaler Konsistenz von Y
(3) $Y \vdash \neg\alpha$ nach C^-.
(H2) "$\Rightarrow$": folgt aus $(\forall 1)$. "$\Leftarrow$": Sei nun $Y \vdash \alpha\frac{c}{x}$ für alle c in $\mathcal{L}C$, also auch $c := c_{x,\alpha,n}$. Sei n minimal gewählt, so dass $\alpha \in \mathcal{L}_n$. Angenommen $Y \nvdash \forall x\alpha$, dann
(1) $Y \vdash \neg\forall x\alpha$ nach $(H1)$
(2) $Y \vdash \neg\forall x\alpha \wedge \alpha\frac{c}{x}$ nach Vorraussetzung $Y \vdash \alpha\frac{c}{x}$ und $(\wedge 1)$
(3) $Y \vdash \alpha^x, \neg\alpha^x$ nach der Definition von α^x und Konstruktion von U,
was ein Widerspruch zur Konsistenz von Y ist. Also gilt $Y \vdash \forall x\alpha$.

□

Lemma 12. *Jede Henkin-Menge $Y \subseteq \mathcal{L}$ hat ein Modell.*

Beweis. Wir konstruieren ein Modell für Y, das sogenannte "Termmodell": Sei $t \approx t'$ falls $Y \vdash t = t'$. Dann ist $\approx$ eine Kongruenz auf der Termalgebra $\mathcal{T}$ von $\mathcal{L}$:

(a) $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation nach Bemerkung 1a) und b)
(b) $t_1 \approx t'_1, \ldots, t_n \approx t'_n \Rightarrow f\vec{t} \approx f\vec{t'}$ für jedes $f \in L$ nach Bemerkung 1c)
(c) $Y \vdash r\vec{t}$ und $t_1 \approx t'_1, \ldots, t_n \approx t'_n \Rightarrow Y \vdash r\vec{t'}$ für jedes $r \in L$ nach Bemerkung 1d)

Der Träger des gesuchten Modells $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \omega)$ ist $A := \{\bar{t} \mid t \in \mathcal{T}\}$, wobei $\bar{t}$ die Äquivalenzklasse des Terms t bezeichnet. Sei C die Menge der Konstanten von $\mathcal{L}$, dann gibt es nach $(H3)$ zu jedem Term t aus $\mathcal{T}$ ein $c \in C$ mit $c \approx t$, daher $A = \{\bar{c} \mid c \in C\}$. Wir definieren

- $f^{\mathcal{A}}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) := \overline{ft_1 \cdots t_n}$ für Operationszeichen, dies ist nach (b) wohldefiniert.
- $r^{\mathcal{A}}\bar{t}_1 \cdots \bar{t}_n :\Leftrightarrow Y \vdash r\vec{t}$ für Relationszeichen, dies ist nach (c) wohldefiniert.
- $c^{\mathcal{A}} := \bar{c}$ und $x^{\mathcal{M}} := \bar{x}$ für Konstanten und Variablen von $\mathcal{L}$

Wir können nun induktiv

(i) $t^{\mathcal{M}} = \bar{t}$ und
(ii) $\mathcal{M} \vDash \alpha \Leftrightarrow Y \vdash \alpha$

zeigen. Für Primterme ist (i) klar, und mit der Induktionsannahme $t_i^{\mathcal{M}} = \bar{t}_i$ für $i = 1, \ldots, n$ haben wir dann

$$(f\vec{t})^{\mathcal{M}} \overset{\text{Def.}}{=} f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}) \overset{\text{I.A.}}{=} f^{\mathcal{M}}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) \overset{\text{Def.}}{=} \overline{f\vec{t}}.$$

Wir überprüfen (ii) für alle Formeln α durch Induktion über den Rang $rg(\alpha)$ der Formel α. Für $rg(\alpha) = 0$ kann α die Form $t = s$ oder $r\vec{t}$ für Terme s, t und Relationszeichen r annehmen.

- $\mathcal{M} \vDash t = s :\overset{(=)}{\Leftrightarrow} t^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \bar{t} = \bar{s} \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} Y \vdash t = s$
- $\mathcal{M} \vDash r\vec{t} :\overset{(r)}{\Leftrightarrow} r^{\mathcal{M}}t_1^{\mathcal{M}} \cdots t_n^{\mathcal{M}} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} r^{\mathcal{M}}\bar{t}_1 \cdots \bar{t}_n \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} Y \vdash r\vec{t}$

Für den Induktionsschritt beachten wir, dass $rg(\varphi)$ für alle Formeln φ und θ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $rg(\varphi) < rg(\neg\varphi)$
- $rg(\varphi), rg(\theta) < rg(\varphi \wedge \theta)$
- $rg(\varphi\frac{c}{x}) < rg(\forall x\varphi)$

Wir überprüfen nun die Gültigkeit von (ii) nacheinander für Formeln der Form $\alpha \wedge \beta$, $\neg\alpha$ und $\forall x\alpha$ wobei wir nach Induktionsannahme die Korrektheit von (ii) für α, β und $\alpha\frac{c}{x}$ bereits überprüft haben:

- $\mathcal{M} \vDash \alpha \wedge \beta :\overset{(\wedge)}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \vDash \alpha, \beta \overset{\text{I.A.}}{\Leftrightarrow} Y \vdash \alpha, \beta \overset{(\wedge 1)}{\Leftrightarrow} Y \vdash \alpha \wedge \beta$
- $\mathcal{M} \vDash \neg\alpha :\overset{(\neg)}{\Leftrightarrow} \mathcal{M} \nvDash \alpha \overset{\text{I.A.}}{\Leftrightarrow} Y \nvdash \alpha \overset{(H1)}{\Leftrightarrow} Y \vdash \neg\alpha$
- $$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash \forall x\alpha \quad &:\overset{(\forall)}{\Leftrightarrow} \quad \mathcal{M}_x^{\bar{c}} \vDash \alpha && \text{für alle } c \in C, \text{ da } A = \{\bar{c} \mid c \in C\} \\ &\overset{c^{\mathcal{M}}=\bar{c}}{\Leftrightarrow} \quad \mathcal{M}_x^{c^{\mathcal{M}}} \vDash \alpha && \text{für alle } c \in C \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \vDash \alpha\frac{c}{x} && \text{nach dem Substitutionssatz} \end{aligned}$$
  (Theorem 23 von Vortrag *Semantik elementarer Sprachen*)
  $$\begin{aligned} &\overset{\text{I.A.}}{\Leftrightarrow} \quad Y \vdash \alpha\frac{c}{x} && \text{für alle } c \in C \\ &\overset{(H2)}{\Leftrightarrow} \quad Y \vdash \forall x\alpha \end{aligned}$$

Nach (AR) ist $Y \vdash \alpha$ für $\alpha \in Y$. Also folgt $\mathcal{M} \vDash Y$ aus (ii). □

3. Vollständigkeitsbeweis

Satz 13 (Modellexistenzsatz). *Jede konsistente Formelmenge $X \subseteq \mathcal{L}$ hat ein Modell.*

Beweis. Sei $Y \supseteq X$ eine Henkin-Menge in einer Konstantenexpansion $\mathcal{L}C$ gemäß Lemma 11. Nach Lemma 12 hat Y, und damit auch $X \subseteq Y$, ein $\mathcal{L}C$-Modell $\mathcal{M}' = (\mathcal{A} \cup C, \omega)$. Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \omega)$ das $\mathcal{L}$-Redukt von $\mathcal{M}'$, dann können wir den *Koinzidenzsatz* (Theorem 10 aus dem Vortrag *Semantik elementarer Sprachen*) anwenden um $\mathcal{M} \vDash X$ zu erhalten. □

Satz 14 (Vollständigkeitssatz)**.** *Für* $X \subseteq \mathcal{L}$ *und* $\alpha \in \mathcal{L}$ *gilt* $X \vdash \alpha \Leftrightarrow X \vDash \alpha$.

Beweis. "($\Rightarrow$)" folgt aus der Korrektheit von $\vdash$ (Korollar 5 aus dem Vortrag *Syntaktisches Folgern und Korrektheit*). "($\Leftarrow$)": Wir nehmen an, dass $X \nvdash \alpha$, dann folgt aus C^+, dass $X \cup \{\neg\alpha\}$ konsistent ist, und somit nach Satz 13 ein Modell hat. Folglich ist $X \nvDash \alpha$. □

References

[1] W. Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*, Vieweg-Teubner, 2008.