

# Kompaktheitssatz, Löwenheim-Skolem

Benjamin Miesch

18. April 2012

Dieses Handout richtet sich nach Kapitel 3.3 und 3.4 in [R]. Grundsätzlich wird dieselbe Notation wie in den vorhergehenden Vorträgen verwendet.

Nachdem wir nun im letzten Vortrag den Vollständigkeitssatz bewiesen haben, wollen wir hier ein paar Anwendungen und Folgerungen betrachten.

## 1 Der Kompaktheitssatz

Mit dem Vollständigkeitssatz können wir nun die aus dem Kalkül gewonnenen Resultate in Aussagen über das semantische Folgern übersetzen. Wie in der Aussagenlogik erhalten wir auch hier den Endlichkeitssatz für das Folgern und den Kompaktheitssatz.

**Satz 1.1** (Endlichkeitssatz für das Folgern).  $X \models \alpha$  impliziert  $X_0 \models \alpha$  für eine endliche Teilmenge  $X_0 \subseteq X$ .

*Beweis.* Mit dem Vollständigkeitssatz folgt der Endlichkeitssatz fürs Folgern direkt aus dem Endlichkeitssatz des Kalküls (Vortrag “Syntaktisches Folgern und Korrektheit”, Satz 7).  $\square$

**Beispiel 1.2.** Dieser Satz hat bereits eine interessante Folgerung für die Körpertheorie, wie folgende Aussage zeigt:

- Eine in allen Körpern der Charakteristik 0 gültige Aussage  $\alpha$  gilt auch in allen Körpern hinreichend hoher, von  $\alpha$  abhängiger Primzahlcharakteristik  $p$ .

*Beweis.* Ein Körper hat die Charakteristik  $p$  falls die Aussage

$$\text{char}_p : \underbrace{1 + \cdots + 1}_p = 0$$

gilt und Charakteristik 0 wenn für alle Primzahlen  $p$  die Aussage  $\neg char_p$  gilt. Die Theorie der Körper der Charakteristik 0 wird also durch die Menge  $X$  bestehend aus den Körperaxiomen und den Aussagen  $\neg char_p$  axiomatisiert. Gilt nun  $X \models \alpha$  für eine Aussage  $\alpha$  so ist nach dem Endlichkeitssatz schon  $X_0 \models \alpha$  für eine endliche Teilmenge  $X_0 \subseteq X$ . Für genügend grosse Primzahlen  $p$  gilt nun  $\neg char_p \notin X_0$  und Körper der Charakteristik  $p$  erfüllen folglich  $X_0$  und daher auch  $\alpha$ .  $\square$

Als Folge von Beispiel 1.2 erhalten wir, dass die Theorie der Körper mit Charakteristik 0 nicht endlich axiomatisierbar ist, d.h. kein endliches Axiomensystem besitzt.

**Beispiel 1.3.** Ein weiteres Beispiel für eine nicht endlich axiomatisierbare Theorie liefert die Theorie DAG der dividierbaren abelschen Gruppen. Eine abelsche Gruppe  $\mathcal{G}$  heisst  $n$ -dividierbar, wenn

$$\mathcal{G} \models \vartheta_n := \forall n \exists y x = ny \text{ mit } ny := \underbrace{y + \dots + y}_n,$$

und dividierbar, wenn  $\mathcal{G} \models \vartheta_n$  für alle  $n \geq 1$ . Die nicht endliche Axiomatisierbarkeit folgt nun aus:

- Jede in allen dividierbaren abelschen Gruppen gültige Aussage  $\alpha \in \mathcal{L}\{+, 0\}$  gilt auch in mindestens einer nichtdividierbaren abelschen Gruppe.

*Beweis.* Sei  $X \models \alpha$ . Dann gilt  $X_0 \models \alpha$  für eine endliche Teilmenge  $X_0 \subseteq X$ . Sei  $\mathbb{Z}_p$  die zyklische Gruppe der Ordnung  $p$ , wobei  $p$  eine Primzahl mit  $p > n$  für alle  $n$  mit  $\vartheta_n \in X_0$ . Da die Abbildung  $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p, x \mapsto nx$ , für  $1 \leq n < p$  surjektiv ist, gilt  $\mathbb{Z}_p \models \vartheta_n$  für  $1 \leq n < p$  und somit  $\mathbb{Z}_p \models X_0$ , also auch  $\mathbb{Z}_p \models \alpha$ .  $\mathbb{Z}_p$  ist jedoch nicht  $p$ -dividierbar.  $\square$

Wir können also für viele Theorien kein endliches Axiomensystem erwarten und definieren aus diesem Grunde den Begriff der Axiomatisierbarkeit folgendermassen.

**Definition 1.4.** Eine Menge  $Z$  von Zeichenfolgen über dem Alphabet  $A$  heisst *entscheidbar*, wenn es einen Algorithmus gibt, der für eine Zeichenfolge  $\xi$  aus Symbolen von  $A$  entscheidet, ob  $\xi$  in  $Z$  liegt. Ansonsten heisst  $Z$  *unentscheidbar*.

**Definition 1.5.** Eine Theorie  $T$  heisst *rekursiv axiomatisierbar*, oder nur *axiomatisierbar*, wenn sie ein entscheidbares Axiomensystem besitzt.

Eine weitere Konsequenz aus dem Endlichkeitsatz ist der sogenannte Kompaktheitssatz.

**Satz 1.6** (Kompaktheitssatz). *Eine Formelmengemenge  $X$  ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von  $X$  erfüllbar ist.*

*Beweis.* Ist  $X$  nicht erfüllbar so gilt  $X \models \perp$ . Mit dem Endlichkeitsatz folgt dann jedoch  $X_0 \models \perp$  für eine endliche Teilmenge  $X_0 \subseteq X$ . Also existiert eine endliche Teilmenge  $X_0$  von  $X$ , die nicht erfüllbar ist.

Umgekehrt ist jedes Modell von  $X$  auch ein Modell für eine beliebige Teilmenge  $X_0 \subseteq X$ .  $\square$

**Korollar 1.7.** *Sei  $T$  eine Theorie mit beliebig grossen endlichen Modellen. Dann besitzt  $T$  auch ein unendliches Modell.*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge  $X = T \cup \{v_i \neq v_j \mid i \neq j\}$ . Nach Voraussetzung hat jede endliche Teilmenge  $X_0 \subseteq X$  ein Modell und somit auch  $X$ . Dieses hat offensichtlich eine unendliche Trägermenge und ist auch ein Modell von  $T$ .  $\square$

Bevor wir weiterfahren, führen wir der Vollständigkeit wegen hier noch die folgende wichtige Definition ein, die in späteren Vorträgen verwendet wird.

**Definition 1.8.** Eine Theorie  $T \subseteq \mathcal{L}^0$  heisst *vollständig*, wenn sie konsistent ist und keine echte konsistente Erweiterungstheorie in derselben Sprache besitzt.

Ist  $T$  eine vollständige Theorie so gilt für jedes  $\alpha \in \mathcal{L}^0$  entweder  $\alpha \in T$  oder  $\neg\alpha \in T$ . Zum Beispiel ist die elementare Theorie  $Th\mathcal{A}$  jeder Struktur  $\mathcal{A}$  vollständig, also auch die Theorie  $Th\mathcal{N}$  der natürlichen Zahlen.

Als eine Folgerung des Kompaktheitsatzes haben wir gesehen, dass die vollständige Theorie  $Th\mathcal{N}$  und somit die Peano Arithmetik ein Nichtstandardmodell besitzt. Auf ähnliche Weise können wir auch die Existenz von Nichtstandardmodellen für die Theorie der reellen Zahlen zeigen. Dies ermöglicht das betreiben einer Nichtstandard-Analyse wie sie von A. Robinson entwickelt wurde.

## 2 Der Satz von Löwenheim-Skolem

Bevor wir zum Satz von Löwenheim-Skolem kommen, wollen wir hier kurz ein paar Grundfakten über abzählbare Mengen auflisten.

**Definition 2.1.** Eine Menge  $M$  heisst *abzählbar*, wenn  $M = \emptyset$  oder wenn es eine surjektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$  gibt, ansonsten *überabzählbar*. Zwei Mengen  $M$  und  $N$  heissen gleichmächtig, kurz  $M \sim N$ , falls eine Bijektion  $f : M \rightarrow N$  existiert. Im Fall  $M \sim \mathbb{N}$  nennen wir  $M$  *abzählbar unendlich*.

**Lemma 2.2.** Sind  $M$  und  $N$  abzählbare Mengen, so sind auch  $M \cup N$  und  $M \times N$  abzählbar. Zudem ist auch die abzählbare Vereinigung  $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$  abzählbarer Mengen  $M_i$  abzählbar.

**Definition 2.3.** Eine Theorie in  $\mathcal{L}$  heisst *abzählbar*, wenn die Sprache  $\mathcal{L}$  abzählbar ist.

**Satz 2.4** (Löwenheim-Skolem). *Eine abzählbare konsistente Theorie  $T$  hat auch ein abzählbares Modell.*

*Beweis.* Wie wir im Beweis des Modellexistenzsatzes (Satz 3.2.6 in [R]) gesehen haben, existiert eine Henkin-Menge  $Y \supseteq T$  in einer geeigneten Konstantenerweiterung  $\mathcal{LC}$  für eine abzählbare Konstantenmenge  $C$ . Betrachten wir nun das Termmodell von  $Y$  so ist dessen Träger gegeben durch  $A = \{\bar{c} \mid c \in C\}$ , wobei  $\bar{c}$  die Äquivalenzklasse von  $c$  in der Menge aller Terme von  $\mathcal{LC}$  bezüglich der Äquivalenzrelation

$$t \approx s \Leftrightarrow Y \vdash_{\mathcal{LC}} t = s$$

bezeichnet.  $Y$  hat also ein abzählbares Modell und folglich auch  $T$  □

**Beispiel 2.5.** Wenden wir Satz 2.4 auf  $T = \langle Th\mathcal{N} \cup \{\underline{n} < x \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle$  an, erhalten wir, dass  $Th\mathcal{N}$  auch ein abzählbares Nichtstandardmodell  $\mathcal{N}'$  besitzt. Wir können dieses Modell folgendermassen veranschaulichen: Wir beginnen mit den rationalen Zahlen im Intervall  $[0, 1)$  und ersetzen 0 durch  $\mathbb{N}$  und alle anderen  $r \in [0, 1)$  durch eine Kopie von  $\mathbb{Z}$ . Dies liefert eine einfache Beschreibung von  $\langle \mathcal{N}' \rangle$ , jedoch sind  $+\mathcal{N}'$  und  $\cdot\mathcal{N}'$  nicht effektiv beschreibbar.

Was sicherlich erstaunlicher erscheint ist, dass wir auch ein abzählbares Nichtstandardmodell der reellen Zahlen erhalten. Man kann also mit den von A. Robinson entwickelten Methoden auch umfangreiche Analysis auf abzählbaren Mengen betreiben.

### 3 Die Paradoxie von Skolem

Der Satz von Löwenheim-Skolem führt auch zu einem auf den ersten Blick paradoxen Resultat. Wie wir in einem vorangehenden Vortrag gesehen haben, können wir die Mengenlehre durch die ZFC-Axiome definieren. Nehmen wir nun an, dass diese Theorie konsistent ist (was allgemein angenommen wird), so hat sie nach Satz 2.4 auch ein abzählbares Modell  $\mathcal{V} = (V, \in^{\mathcal{V}})$ .

Andererseits können wir innerhalb von ZFC die Existenz von überabzählbaren Mengen zeigen. Analog zur obigen Definition führen wir auch innerhalb unserer Theorie die Begriffe der Abzählbarkeit ein. Eine Menge  $x$  heisst abzählbar, wenn  $x = \emptyset$  oder wenn eine surjektive Abbildung  $f : \omega \rightarrow x$  existiert, wobei  $\omega$  die mengentheoretischen natürlichen Zahlen bezeichnet. Ansonsten nennen wir  $x$  überabzählbar. Die Existenz von überabzählbaren Mengen in ZFC folgt aus folgendem Lemma, mit  $x = \omega$ .

**Lemma 3.1.** *Pot(x) hat eine grössere Mächtigkeit als x, d.h. es existiert keine surjektive Abbildung  $f : x \rightarrow Pot(x)$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, es gibt eine surjektive Abbildung  $f : x \rightarrow Pot(x)$ . Betrachte die Menge  $z = \{y \in x \mid y \notin f(y)\}$ . Diese existiert nach (**Aus**) und ist offensichtlich in  $Pot(x)$  enthalten. Wegen der Surjektivität von  $f$  ist  $z = f(y_0)$  für ein  $y_0 \in x$ . Es gilt nun

$$y_0 \in z \Leftrightarrow y_0 \notin f(y_0) \Leftrightarrow y_0 \notin z$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Konsistenz von ZFC. □

Da aber  $(Pot(\omega))^{\mathcal{V}}$  eine Teilmenge von  $V$  ist, enthält  $(Pot(\omega))^{\mathcal{V}}$  sicherlich nur abzählbar viele Elemente, was auf den ersten Blick als paradox erscheinen mag. Der Begriff “abzählbar” hat also innerhalb und ausserhalb der Welt  $\mathcal{V}$  eine unterschiedliche Bedeutung.

Die sogenannte Paradoxie von Skolem kann so erklärt werden, dass das abzählbare Modell  $\mathcal{V}$  weniger Mengen und Funktionen enthält als erwartet.  $\mathcal{V}$  enthält beispielsweise keine Bijektion von  $\omega^{\mathcal{V}}$  nach  $(Pot(\omega))^{\mathcal{V}}$ , die von ausserhalb gesehen durchaus existiert.

### Literatur

- [R] W. Rautenberg, Einführung in die Mathematische Logik, Vieweg-Teubner, 2008