Seminar: Mathematische Logik FS 2012

Hilbert-Kalkül der Prädikatenlogik

Emil Jørgensen

25-04-2012

Dieses Skript ist eine leicht veränderte Version des Abschnittes **(3.6)** in [1]. Die Notationen sind wie in alle vorherigen Vorträgen dieses Seminares.

Zweck: Wir definieren einen Hilbert-Kalkül $\mid\!\sim$, der sich auf eine beliebige elementare Sprache $\mathcal{L}$ bezieht[1], und beweisen der Vollständigkeitssatz.

Beweismethode: Ähnlich wie für den aussagenlogischen Hilbert-Kalkül in Kapitel **(1.6)**. *Korrektheit:* Induktionssatz (von **(1.6)** übertragen) mit $\mathcal{E}\alpha := (X \models \alpha)$. *Vollständigkeit:* Wir wissen schon, dass der in **(3.1)** eingeführte Regelkalkül $\vdash$ vollständig ist, d.h. $\vdash = \models$. Deshalb zeigen wir, dass $\mid\!\sim$ abgeschlossen unter (AR) – (=) (Basisregeln von $\vdash$) ist. Dann gilt: $\vdash \subseteq \mid\!\sim$ und die Behauptung folgt.

Hilbert-Kalküle beruhen auf Tautologien als logische Axiome (vgl. Regelkalküle) und einer kleineren Menge von Schlussregeln. Wir definieren zuerst unser *logisches Axiomensystem* Λ.

Definition 1 (Hilbert-Kalkül $\mid\!\sim$)**.** Die logische Signatur ist wie bisher $L = \{\neg, \wedge, \forall, =\}$ und die einzige Schlussregel ist MP: $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$, d.h. $X \mid\!\sim \alpha, \alpha \to \beta \Rightarrow X \mid\!\sim \beta$. Wieder ist $\alpha \to \beta := \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ und wir definieren die Formelmengen:

$$\begin{aligned}
\Lambda1 &:= \{(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}\} \\
\Lambda2 &:= \{\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{L}\} \\
\Lambda3 &:= \{\alpha \wedge \beta \to \alpha, \alpha \wedge \beta \to \beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{L}\} \\
\Lambda4 &:= \{(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathcal{L}\} \\
\Lambda5 &:= \{\forall x\alpha \to \alpha\tfrac{t}{x} \mid \alpha \in \mathcal{L}\} \ \ (\alpha, \tfrac{t}{x} \text{ kollisionsfrei}) \\
\Lambda6 &:= \{\alpha \to \forall x\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}\} \ \ (x \notin \mathit{frei}\ \alpha) \\
\Lambda7 &:= \{\forall x(\alpha \to \beta) \to \forall x\alpha \to \forall x\beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{L}\} \\
\Lambda8 &:= \{\forall y\alpha\tfrac{y}{x} \to \forall x\alpha \mid \alpha \in \mathcal{L}\} \ \ (y \notin \mathit{var}\ \alpha) \\
\Lambda9 &:= \{t = t \mid t \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}\} \\
\Lambda10 &:= \{x = y \to \alpha \to \alpha\tfrac{y}{x} \mid \alpha \text{ Primformel}\}
\end{aligned}$$

Das Axiomensystem Λ besteht aus der Menge alle Formeln $\forall x_1 \cdots \forall x_n\varphi, n \geq 0$, wobei $\varphi \in \bigcup_{i=1}^{10} \Lambda_i$ und $x_1, ..., x_n$ beliebig sind, z.B. ist deshalb auch $\forall x\ x = x$ ein Element in Λ.

---

[1] Zwei elementare Sprachen unterscheiden sich nur durch Wahl der nichtlogischen Signatur.

Bemerkung 2. Wir können Λ auch charakterisieren als die Menge aller Formeln, die aus $\Lambda 1 - \Lambda 10$ mittels der *Generalisierungsregel* MQ:$\alpha/\forall x\alpha$ ableitbar sind. Bemerke, dass MQ kein Schlussregel in $\mid\!\sim$ ist und auch nicht beweisbar.

Bemerkung 3. $\mid\!\sim$ ist eine Erweiterung des entsprechenden aussagenlogischen Hilbert-Kalküls in **(1.6)**. Bemerke, dass $\Lambda 1 - \Lambda 10$ Tautologien sind: $\Lambda 1 - \Lambda 4$ klar aus **(1.6)** und $\Lambda 5 - \Lambda 10$ wegen den semantische Äquivalenzen in **(2.3)**. z.B. gilt mit Korollar 2.3.6: $\forall x\alpha \models \alpha\frac{t}{x}$ und verwenden wir das semantische Deduktionstheorem der Prädikatenlogik, $X, \alpha \models \beta \Leftrightarrow X \models \alpha \to \beta$, folgt, dass $\Lambda 5$ eine Tautologie ist.

Wir betonen, dass $\Lambda 5$ den Basisregel ($\forall 1$) aus **(3.1)** entspricht und $\Lambda 8$ die gebundene Umbenennung aus **(2.4)**. Die letzten zwei Axiome, $\Lambda 9 - \Lambda 10$, regeln den Umgang mit dem logischen Symbol $=$ aus L.

Für $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt für einen beliebige Präfixblock $\forall\vec{x} = \forall x_1 \cdots \forall x_n$, dass

$$\models \varphi \;\;\Rightarrow\;\; \models \forall\vec{x}\varphi$$

und wir sehen dass auch Λ nur Tautologien enthält. Ebenfalls, $\models \alpha, \alpha \to \beta \Rightarrow \models \beta$, d.h. alle aus Λ mit MP herleitbaren Formeln sind Tautologien.

Definition 4 (Beweis in $\mid\!\sim$)**.** Für $\alpha \in \mathcal{L}$ und $X \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ ist $\Phi = (\varphi_0, ..., \varphi_n) \in \mathcal{L}^{n+1}$ ein *Beweis für α aus X*, falls $\alpha = \varphi_n$ und

$$\forall k \leq n : (\varphi_k \in X \cup \Lambda \text{ oder } \exists\varphi : \varphi \text{ und } \varphi \to \varphi_k \text{ treten in } \Phi \text{ vor } \varphi_k \text{ auf})$$

d.h. φ entsteht durch Anwendung von MP auf Folgenglieder, die φ_k vorangehen.

Notation: $X\mid\!\sim \alpha$.

Bemerkung 5. Ein (formaler) Beweis ist genau wie in **(1.6)** definiert. Es gilt also wieder $X\mid\!\sim \alpha, \alpha \to \beta \Rightarrow X\mid\!\sim \beta$ und wir können den Induktionssatz 1.6.1 unverändert übertragen.

Satz 6 (Induktionssatz für $\mid\!\sim$)[2]**.** *Sei $X \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ gegeben und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Formeln mit*

$$\begin{array}{ll} (E1) & \forall\alpha \in X \cup \Lambda : \mathcal{E}\alpha \\ (E2) & \forall\alpha, \beta \in \mathcal{L} : (\mathcal{E}\alpha, \mathcal{E}(\alpha \to \beta) \Rightarrow \mathcal{E}\beta) \end{array}$$

Dann gilt $\mathcal{E}\alpha$ für alle α mit $X\mid\!\sim \alpha$.

Als Anwendung hiervon bekommen wir leicht:

Satz 7 (Korrektheit von $\mid\!\sim$)**.** *Für alle $\alpha \in \mathcal{L}$, $X \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ gilt*

$$X\mid\!\sim \alpha \Rightarrow X \models \alpha$$

Insbesondere für $X = \emptyset$: in $\mid\!\sim$ sind alle aus Λ beweisbaren Formeln Tautologien.

Beweis. Induktion über $X \vdash \alpha$. Definiere $\mathcal{E}\alpha := X \models \alpha$, X fixiert.

$$\begin{array}{ll} (E1): & \alpha \in X \Rightarrow X \models \alpha \quad (\mathcal{M} \models X \Rightarrow \mathcal{M} \models \alpha) \\ & \alpha \in \lambda \Rightarrow \models \alpha \Rightarrow X \models \alpha \end{array}$$

$$(E2): \quad \text{Sei nun } X \models \alpha, \alpha \to \beta. \text{ Dann gilt: } X \models \beta.$$

□

[2] Beweis in Vortrag 3: Induktion über die länge eines Beweis.

Der Beweis der Vollständigkeit von $\mid\!\sim$ basiert auf der Vollständigkeit von $\vdash$ in **(3.1)-(3.2)**, gezeigt mit sog. Henkin-Mengen. Wir zeigen, dass $\mid\!\sim$ alle 9 Basisregeln von $\vdash$ erfüllt (genau wie in **(1.6)**) und mit dem in **(3.1)** eingeführten Beweisprinzip der Regelinduktion folgt der Vollständigkeitssatz.

Satz 8 (Vollständigkeit von $\mid\!\sim$)**.** *Für alle X, α wie oben gilt*

$$X \models \alpha \Rightarrow X \mid\!\sim \alpha$$

Beweis. (AR) und (MR) sind klar durch die Definition von $X \mid\!\sim \alpha$ und $\Lambda 9$. Das Kalkül $\mid\!\sim$ ist eine Erweiterung von dem entsprechenden Kalkül in **(1.6)** und deshalb folgen $(\wedge 1) - (\neg 2)$ unmittelbar.

$(\forall 1)$: $\quad (X \mid\!\sim \forall x\alpha \Rightarrow X \mid\!\sim \alpha\frac{t}{x}$, für $\alpha, \frac{t}{x}$ kollisionsfrei).

Beweis.

$$\begin{array}{ll} X \mid\!\sim \forall x\alpha & \text{(Annahme)} \\ X \mid\!\sim \forall x\alpha \to \alpha\frac{t}{x} & (\Lambda 5) \\ X \mid\!\sim \alpha\frac{t}{x} & \text{(MP)} \end{array}$$

□

$(\forall 2)$: $\quad (X \mid\!\sim \alpha\frac{y}{x} \Rightarrow X \mid\!\sim \forall x\alpha,\ y \notin \mathit{frei}\ X \cup \mathit{var}\ \alpha)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die folgende Behauptung:

$$(X \mid\!\sim \alpha \Rightarrow X \mid\!\sim \forall x\alpha,\ x \notin \mathit{frei}\ X) \qquad (*)$$

Induktion über $X \mid\!\sim \alpha$, X fixiert ($\mathcal{E}\alpha := X \mid\!\sim \forall x\alpha$).

$(E1) : \alpha \in X : \ \Rightarrow x \notin \mathit{frei}\ \alpha$ und

$$\begin{array}{ll} X \mid\!\sim \alpha \to \forall x\alpha & (\Lambda 6) \\ X \mid\!\sim \alpha & \text{(Annahme)} \\ X \mid\!\sim \forall x\alpha & \text{(MP)} \end{array}$$

$\alpha \in \Lambda : \ \Rightarrow \ \forall x\alpha \in \Lambda \ \Rightarrow \ X \mid\!\sim \forall x\alpha.$

$(E2)$: Nehme an: $X \mid\!\sim \forall x\alpha, X \mid\!\sim \forall x(\alpha \to \beta)$.

$$\begin{array}{ll} X \mid\!\sim \forall x(\alpha \to \beta) \to [\forall x\alpha \to \forall x\beta] & (\Lambda 7) \\ X \mid\!\sim \forall x\alpha, \forall x(\alpha \to \beta) & \text{(Annahme)} \\ X \mid\!\sim \forall x\alpha \to \forall x\beta & \text{(MP)} \\ X \mid\!\sim \forall x\beta & \text{(MP)} \end{array}$$

Beweis von $(\forall 2)$*:*

$$\begin{array}{ll} X \mid\!\sim \alpha\frac{y}{x} \ \ (y \notin \mathit{frei}\ X \cup \mathit{var}\ \alpha) & \text{(Annahme)} \\ X \mid\!\sim \forall y\alpha\frac{y}{x} & (*) \\ X \mid\!\sim \forall y\alpha\frac{y}{x} \to \forall x\alpha \ \ (y \notin \mathit{var}\ \alpha) & (\Lambda 8) \\ X \mid\!\sim \forall x\alpha & \text{(MP)} \end{array}$$

□

(=): $(X \mathrel{|\!\!\sim} s = t, \alpha\frac{s}{x} \Rightarrow X \mathrel{|\!\!\sim} \alpha\frac{t}{x}$, α Primformel in $\mathcal{L})$.

Beweis. Sei y eine Variable, sodass $y \neq x$ und $y \notin var\ s, var\ \alpha$ mit α Primformel. Bemerke, dass wir im dritten und vierten Schritt die Substitutionsregeln aus **(2.2)** verwenden.

$$
\begin{array}{ll}
X \mathrel{|\!\!\sim} s = t, \alpha\dfrac{s}{x} & \text{(Annahme)} \\
X \mathrel{|\!\!\sim} \forall x \forall y[x = y \to \alpha \to \alpha\frac{y}{x}] & (\Lambda 10) \\
X \mathrel{|\!\!\sim} [\forall y(x = y \to \alpha \to \alpha\frac{y}{x})]\frac{s}{x} = \forall y(s = y \to \alpha\frac{s}{x} \to \alpha\frac{y}{x}) & (\forall 1) \\
X \mathrel{|\!\!\sim} [s = y \to \alpha\frac{s}{x} \to \alpha\frac{y}{x}]\frac{t}{y} & (\forall 1)
\end{array}
$$

Aufgrund der Wahl von y und der Identität $\alpha\frac{y}{x}\frac{t}{y} = \alpha\frac{t}{x}$ aus **(2.2)** für $y \notin var\ \alpha$ gilt:

$$[s = y \to \alpha\tfrac{s}{x} \to \alpha\tfrac{y}{x}]\tfrac{t}{y} \quad = \quad (s = t \to \alpha\tfrac{s}{x} \to \alpha\tfrac{y}{x}\tfrac{t}{y}) \quad = \quad (s = t \to \alpha\tfrac{s}{x} \to \alpha\tfrac{t}{x})$$

2-malige Anwendung von MP gibt uns unsere Behauptung und beendet den Beweis von Satz 8:

$$
\begin{array}{ll}
X \mathrel{|\!\!\sim} s = t \to \alpha\frac{s}{x} \to \alpha\frac{t}{x} & \\
X \mathrel{|\!\!\sim} \alpha\frac{s}{x} \to \alpha\frac{t}{x} & \text{(MP)+(Annahme)} \\
X \mathrel{|\!\!\sim} \alpha\frac{t}{x} & \text{(MP)+(Annahme)}
\end{array}
$$

□

Satz 9 (Vollständigkeitssatz)**.** *Für alle $\alpha \in \mathcal{L}, X \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ gilt*

$$X \mathrel{|\!\!\sim} \alpha \Leftrightarrow X \models \alpha$$

Kurz: $\mathrel{|\!\!\sim} = \models$.

Insbesondere gilt $\mathrel{|\!\!\sim} \alpha \ \Leftrightarrow \models \alpha$, d.h. genau die Tautologien sind aus dem Axiomensystem Λ mit MP *beweisbar.*

Zuletzt können wir das folgende Korollar durch die Definition von Λ und Satz 9 formulieren.

Korollar 10. *Für $\alpha \in \mathcal{L}$ beliebig sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) : $\mathrel{|\!\!\sim} \alpha$, *d.h. α ist mittels MP herleitbar aus Λ.*

(ii) : *α ist mittels MP und MQ ableitbar aus $\Lambda 1 - \Lambda 10$.*

(iii) : $\models \alpha$, *d.h. α ist eine Tautologie.*

Literatur:

[1] W. Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*, Vieweg-Teubner, 2008.