Gödelzahlen

Sara Svaluto-Ferro, Merlin Bärtschi

Mai 2, 2012

Dieser Text ist eine Zusammenfassung des Abschnitts über Gödelzahlen in 6.1 von [1]. Wir werden Gödelzahlen einführen und die primitive Rekursivität einiger mit ihnen verwandten Funktionen zeigen.

Definition 1. Sei $(a_0, \dots, a_n)$ eine Folge natürlicher Zahlen. Die *Gödelzahl* dieser Folge ist definiert als $\langle a_0, \dots, a_n \rangle := p_0^{a_0+1} \dots p_n^{a_n+1}$, wobei p_k die k-te Primzahl in aufsteigender Reihenfolge bezeichne. Wir definieren $\langle\rangle := 1$
Wir definieren Gz als die Menge aller Gödelzahlen.
Die *Länge* la einer Gödelzahl a ist definiert als $la := \min\{k | p_k \nmid a\}$.

Man beachte, dass, wenn eine Primzahl in der Primfaktorzerlegung einer Gödelzahl auftritt, alle kleineren Primzahlen ebenfalls auftreten. Dank der (bis auf Einheiten) eindeutigen Primfaktorzerlegung erhalten wir

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle = \langle b_0, \dots, b_m \rangle \Leftrightarrow m = n \text{ und } a_i = b_i \text{ für alle } 0 \leq i \leq n$$

Im Folgenden werden wir von einigen Funktionen, die mit Gödelzahlen zu tun haben, zeigen, dass sie p.r. sind.

Proposition 2. Folgende Funktionen sind p.r.

1) $\vec{a} \mapsto \langle a_0 \dots a_n \rangle$

2) χ_{Gz}

3) $a \mapsto la$

Die Funktion 3) muss zuerst noch für alle natürlichen Zahlen, die keine Gödelzahlen sind, definiert werden. Da der Funktionswert für diese nicht von Interesse ist, können wir die Funktion so wählen, dass der Beweis möglichst einfach wird. Die Definition wird im Beweis gegeben.

Beweis. Für die Funktion 1) ist die Aussage klar, da Produkte und Potenzen endlich vieler p.r. Funktionen wieder p.r. ist.

Für die Funktion 2) stellen wir fest, dass

$$a \in Gz \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ und } (\forall p \leq a)(\forall q \leq p)[(\text{prim } p \wedge \text{prim } q \wedge \ p \mid a) \Rightarrow q \mid a] \qquad (1)$$

Da gilt

$$\text{prim } p \Leftrightarrow p \neq 0 \wedge p \neq 1 \wedge (\forall k < p)[k \mid p \Rightarrow k = 1]$$

ist χ_P p.r. wobei P die Menge aller Primzahlen bezeichne. Da somit die Prädikate prim und $\mid$ beide p.r. sind, ist das Prädikat in (1) p.r. und somit auch seine beschränkte Quantifizierung. Da auch $\neq$ p.r. ist, folgt die Behauptung.

Zum Beweis von 3) definieren wir $la := \mu k \leq a[p_k \nmid a]$. Nach dem letzten Vortrag ist dies p.r. und falls a eine Gödelzahl ist, entspricht dies gerade der ursprünglichen Definition von la. Somit folgt 3). □

Wir möchten noch zwei weitere Funktionen betrachten. Diese müssen jedoch zuerst definiert werden.

Definition 3. Die *"Komponenten-Erkennungsfunktion"* $(a, i) \mapsto (a)_i$ in $\mathbf{F_2}$ ist definiert durch

$$(a)_i := 0 \qquad \text{falls } a = 0$$

$$(a)_i := \mu k \leq a[p_i^{k+2} \nmid a] \qquad \text{sonst}$$

Die *"arithmetische Verkettung"* $* \in \mathbf{F_2}$ ist definiert durch

$$a * b := a \cdot \prod_{i<lb} p_{la+i}^{(b)_i+1} \qquad \text{falls } a, b \in Gz$$

$$a * b := 0 \qquad \text{sonst}$$

Bemerkung 4. Aus der Definition folgt sofort, dass

$$(\langle a_0 \ldots a_n \rangle)_i = a_i \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

und

$$a = \prod_{i<la} p_i^{(a)_i+1} \qquad \text{für alle } a \in Gz.$$

Für die arithmetische Verkettung sieht man, dass

$$\langle a_0, \ldots a_n \rangle * \langle b_0, \ldots b_m \rangle = \langle a_0, \ldots a_n, b_0, \ldots b_m \rangle$$

Mit anderen Worten, die arithmetische Verkettung entspricht für Gödelzahlen der Wortverkettung.

Proposition 5. Die Komponenten-Erkennungsfunktion und die arithmetische Verkettung sind p.r.

Beweis. Da $|$ und somit auch $\nmid$ p.r. Prädikate sind, ist nach Lemma 16 und Bemerkung 21 des Vortrags "Rekursive und primitiv-rekursive Funktionen" (Patrik) auch die Komponenten-Erkennungsfunktion p.r.

Zum Beweis der p.r. der arithmetischen Verkettung, verwenden wir, dass Gz p.r. ist. Somit müssen wir zeigen, dass die Definition der arithmetischen Verkettung im Fall $a, b \in Gz$ und im anderen Falle p.r. ist. Falls $a, b \in Gz$ folgt dies daraus, dass die Komponenten-Erkennungsfunktion und die Primzahlaufzählung p.r. sind und somit auch das endliche Produkt, durch das $a * b$ definiert ist. Im anderen Falle ist $a * b$ konstant 0 und somit p.r. Daraus folgt, dass die arithmetische Verkettung p.r. ist. $\square$

Es gibt neben den beiden Regeln **Oc** und **Op** noch ein weiteres Schema, um p.r. Funktionen zu konstruieren. Dazu machen wir zuerst

Definition 6. Sei $f \in \mathbf{F_{n+1}}$ Wir definieren $\bar{f} \in \mathbf{F_{n+1}}$ wie folgt:

$$\bar{f}(\vec{a}, 0) := \langle\rangle = 1$$

$$\bar{f}(\vec{a}, b) := \langle f(\vec{a}, 0), \ldots, f(\vec{a}, b-1)\rangle \text{ für } b > 0$$

Mit Hilfe der Funktion $\bar{f}$ können wir nun das *Schema der Wertverlaufsrekursion* definieren.

Proposition 7. Sei $F \in \mathbf{F_{n+2}}$. Dann gibt es genau ein $f \in \mathbf{F_{n+1}}$, das die Bedingung

$$\mathbf{Oq} \quad f(\vec{a}, b) = F(\vec{a}, b, \bar{f}(\vec{a}, b))$$

erfüllt.

Beweis. Der Beweis verwendet Induktion über den Wert von b. Für $b = 0$ gilt nämlich

$$f(\vec{a}, b) = F(\vec{a}, 0, \langle\rangle) = F(\vec{a}, 0, 1).$$

Somit ist $f(\vec{a}, b)$ eindeutig bestimmt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $f(\vec{a}, c)$ eindeutig bestimmt ist für $0 \leq c < b$. Dann gilt

$$f(\vec{a}, b) = F(\vec{a}, b, \langle f(\vec{a}, 0), \ldots, f(\vec{a}, b-1)\rangle)$$

Nach Induktionsannahme ist somit auch $f(\vec{a}, b)$ eindeutig bestimmt. Somit ist f eindeutig bestimmt und seine Existenz ist durch die Formeln für $f(\vec{a}, b)$ oben gegeben. Dies beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung 8. Man sieht leicht, dass **Op** ein Spezialfall von **Oq** ist. Falls f mittels **Op** aus den p.r. Funktionen $g \in \mathbf{F_n}$ und $h \in \mathbf{F_{n+2}}$ gewonnen wird, so kann man F wie folgt definieren:

$$F(\vec{a}, 0, c) := g(\vec{a})$$

$$F(\vec{a}, Sb, c) := h(\vec{a}, b, (c)_b)$$

Wendet man **Oq** auf F an, so erhält man gerade f.

Satz 9. Sei f durch F mittels **Oq** definiert. Dann gilt F p.r. $\Rightarrow f$ p.r.

Beweis. Mit Hilfe der arithmetischen Verkettung können wir $\bar{f}$ schreiben als

$$\bar{f}(\vec{a}, 0) = 1$$

$$\bar{f}(\vec{a}, Sb) = \bar{f}(\vec{a}, b) * \langle f(\vec{a}, b)\rangle = \bar{f}(\vec{a}, b) * \langle F(\vec{a}, b, \bar{f}(\vec{a}, b))\rangle$$

Wenn wir $g \in \mathbf{F_n}$ und $h \in \mathbf{F_{n+2}}$ definieren durch

$$g(\vec{a}) = 1$$

$$h(\vec{a}, b, c) := c * \langle F(\vec{a}, b, c)\rangle$$

erhalten wir, dass $\bar{f}$ mittels **Op** aus g und h definiert werden kann. Da F nach Annahme p.r. ist, sind auch g und h p.r. und somit auch $\bar{f}$. Wir wissen aber, dass $f(\vec{a}, b) = F(\vec{a}, b, \bar{f}(\vec{a}, b))$ und somit als Verknüpfung zweier p.r. Funktionen ebenfalls p.r. Dies beendet den Beweis. $\square$

Literatur

[R] W.Rautenberg; *Einführung in die Mathematische Logik*; Vieweg-Teubner, 2008