Mathematische Logik

Gödelisierung von Formeln

Angelo Abächerli

08. Mai 2012

Dieser Vortrag basiert auf dem Kapitel 6.2 aus *Einführung in die Mathematische Logik* von Wolfgang Rautenberg [1].

1 Einführung

Bei der Gödelisierung geht es grob gesagt um die Beschreibung der Syntax einer Sprache $\mathcal{L}$, sowie des Vorgangs des Beweisens, durch natürliche Zahlen und Operationen mit diesen. Man kann dann zum Beispiel syntaktische Prädikate wie "$x \in var\alpha$" durch entsprechende Prädikate über $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ersetzen.

Im Folgenden werden wir die Gödelisierung exemplarisch anhand der Sprache $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ar}$ behandeln. Diese Sprache ist bestimmt durch die nichtlogische Signatur $L = \{0, \mathtt{S}, +, \cdot\}$ und liegt der Peanoarithmetik zu Grunde. (Siehe Vortrag über Peano-Axiome und Peano-Strukturen). Wir werden unter anderem zeigen, dass in dieser Sprache die Mengen der Terme, der Formeln und der logischen Axiome primitiv rekursiv (p.r.) sind, wobei wir primitiv rekursiv noch genau definieren müssen, da wir uns nicht in $\mathbb{N}$ befinden. Das Vorgehen lässt sich auch auf andere Sprachen übertragen.

Als erstes müssen wir jedem Grundzeichen ζ von $\mathcal{L}$, also jedem Zeichen im Alphabet, auf eindeutige Weise eine Nummer $\#\zeta$ aus $\mathbb{N}$ zuordnen. In unserem Fall wählen wir die Zuordnung:

ζ	$=$	$\neg$	$\wedge$	$\forall$	$($	$)$	0	$\mathtt{S}$	$+$	$\cdot$	$\boldsymbol{v}_0$	$\boldsymbol{v}_1$	$\ldots$
$\#\zeta$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	$\ldots$

Als nächsten Schritt kodieren wir mit dieser Zuordnung die Zeichenfolgen (d.h.

die Wörter) über dem Alphabet von $\mathcal{L}$. Die Menge der Zeichenfolgen sei wie auch schon $\mathcal{S}_\mathcal{L}$.

Definition 1.1. Sei $\xi = \zeta_0 \dots \zeta_n$ ein Wort ($\xi \in \mathcal{S}_\mathcal{L}$). Die *Gödelzahl* $\dot{\xi}$ von ξ ist

$$\langle \#\zeta_0, \dots, \#\zeta_n \rangle = p_0^{1+\#\zeta_0} \cdot \dots \cdot p_n^{1+\#\zeta_n} \in \mathbb{N}.$$

Des Weiteren setze $\dot{\mathcal{S}}_\mathcal{L} = \{\dot{\xi} \mid \xi \in \mathcal{S}_\mathcal{L}\} \subseteq \mathbb{N}$ und für $W \subseteq \mathcal{S}_\mathcal{L}$ setze entsprechend $\dot{W} = \{\dot{\xi} \mid \xi \in W\} \subseteq \mathbb{N}$. Mit der so eingeführten Notation heisse $W \subseteq \mathcal{S}_\mathcal{L}$ p.r. (bzw. rekursiv), falls $\dot{W}$ als 1-stelliges Prädikat über $\mathbb{N}$ p.r. (bzw. rekursiv) ist.

Wir beachten, dass man zwischen dem *Zeichen* ζ und dem *Wort* ζ unterscheiden muss. Das *Zeichen* ζ besitzt nur eine Nummer $\#\zeta$, das *Wort* ζ (bestehend aus einem Zeichen) besitzt eine Gödelzahl $\dot{\zeta}$. Beispielsweise hat $\neg$ als Zeichen die Nummer 3, aber als Wort die Gödelzahl 2^{1+3}. Wir können die beiden Zahlen aber einfach auseinanderhalten, denn die Nummern der Zeichen sind alle ungerade, während die Gödelzahl eines nichtleeren Wortes nach Definition stets durch zwei teilbar ist.

Wir bemerken, dass $\dot{\mathcal{S}}_\mathcal{L}$ nach dem Vortrag über primitive Funktionen und über Gödelzahlen eine p.r. Teilmenge der Menge aller Gödelzahlen Gz ist, denn

$$n \in \dot{\mathcal{S}}_\mathcal{L} \Leftrightarrow (n \in Gz \text{ und } (\forall k < ln)\ 2 \nmid (n)_k)$$

wobei ln die *Länge* der Gödelzahl n bezeichnet und $(n)_k$ die k-te *Komponente* von n.

2 Primitive Rekursivität der Menge aller Terme und der Menge aller Formeln

Sei $*$ die primitiv rekursive *arithmetische Verkettung* aus dem Vortrag über Gödelzahlen. Wir setzen für $n, m, i, a, b \in Gz$:

- $\tilde{\mathtt{S}}n := \dot{\mathtt{S}} * n \qquad n \tilde{+} m := \dot{+} * n * m \qquad n \tilde{\cdot} m := \dot{\cdot} * n * m$
- $n \tilde{\doteq} m := n * \dot{\doteq} * m \qquad \tilde{\forall}(i, n) := \dot{\forall} * i * n$
- $\tilde{\neg} a := \dot{\neg} * a \qquad a \tilde{\wedge} b := \dot{(} * a * \dot{\wedge} * b * \dot{)} \qquad a \tilde{\rightarrow} b := \tilde{\neg}(a \tilde{\wedge} \tilde{\neg} b)$

All diese Funktionen $\tilde{\mathtt{S}}, \tilde{\neg} : Gz \to Gz$, bzw. $\tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{\doteq}, \tilde{\forall}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee} : Gz \times Gz \to Gz$, sind als Verkettung p.r. Funktionen wieder p.r.

Für $\xi, \eta \in \mathcal{S}_\mathcal{L}$ gilt $\dot{(\xi\eta)} = \dot{(\xi_0 \dots \xi_n \eta_0 \dots \eta_m)} = \langle \#\xi_0, \dots, \#\xi_n, \#\eta_0, \dots, \#\eta_m \rangle = \langle \#\xi_0, \dots, \#\xi_n \rangle * \langle \#\eta_0, \dots, \#\eta_m \rangle = \dot{\xi} * \dot{\eta}$. Somit haben wir, dass für Terme s, t und eine Variable x und eine Formel α gilt

- $(\dot{\mathtt{S}t}) = \tilde{\mathtt{S}}\dot{t}$ $\qquad (\dot{+}st) = \dot{s}\tilde{+}\dot{t}$ $\qquad (\dot{\cdot}st) = \dot{s}\tilde{\cdot}\dot{t}$
- $(s \dot{=} t) = (\dot{s}\tilde{=}\dot{t})$ $\qquad (\dot{\forall} x\alpha) = \tilde{\forall}(\dot{x}, \dot{\alpha})$

Für Wörter $\xi, \eta \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ werden wir im Folgenden $\xi < \eta$ schreiben falls $\dot{\xi} < \dot{\eta}$. Beachte dass, wenn ξ ein echtes Teilwort von η ist, $\xi < \eta$ gilt.

Wir erinnern hier noch einmal an die Wertverlaufsrekursion aus dem Vortrag über Gödelzahlen. Gegeben sei eine $(n+2)$-stellige Funktion F. Sei f eine n-stellige Funktion, die mittes **Oq** durch F definiert ist. Das heisst

$$\mathbf{Oq}: \qquad f(\vec{a}, b) = F(\vec{a}, b, \bar{f}(\vec{a}, b))$$

Hierbei kodiert die $(n + 1)$-stellige Funktion $\bar{f}$ den Wertverlauf von f im letzten Argument:

$$\bar{f}(\vec{a}, b) = \langle\, \rangle = 1 \quad , \quad \bar{f}(\vec{a}, b) = \langle f(\vec{a}, 0), \ldots, f(\vec{a}, b-1)\rangle \text{ für } b > 0$$

Im Vortrag über Gödelzahlen (Satz 9) haben wir bewiesen, dass falls F p.r. ist und f durch F mittels **Oq** definiert ist, dann ist auch f p.r.

Satz 2.1. *Die Menge $\mathcal{T}$ aller Terme von $\mathcal{L}$ ist primitiv rekursiv.*

Beweis. Nach der rekursiven Definition von $\mathcal{T}$ gilt

$$\begin{aligned} t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow ((t \in \mathcal{T}_{prim}) \vee (\exists t_1, t_2 < t)[t_1, t_2 \in \mathcal{T} \\ \wedge ((t = \mathtt{S}t_1) \vee (t = +t_1t_2) \vee (t = \cdot t_1t_2))]), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{T}_{prim}$ die Menge der Primterme bezeichnet; für unsere Sprache ist also $\mathcal{T}_{prim} = \mathcal{V} \cup \{0\}$ für $\mathcal{V}$ die Menge der Variablen von $\mathcal{L}$. Da $n \in \dot{\mathcal{V}} \Leftrightarrow (\exists k \leqslant n)[n = 2^{22+2k}]$ ist $\mathcal{V}$ p.r und somit auch $\mathcal{T}_{prim}$. Obige Äquivalenz können wir umschreiben zu

$$\begin{aligned} n \in \dot{\mathcal{T}} \Leftrightarrow ((n \in \dot{\mathcal{T}}_{prim}) \vee (\exists i, k < n)[i, k \in \dot{\mathcal{T}} \\ \wedge ((n = \tilde{\mathtt{S}}i) \vee (n = i\tilde{+}k) \vee (n = i\tilde{\cdot}k)))]). \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Notation sei Q das p.r. Prädikat über $\mathbb{N}$ gegeben durch $Q(i, n, k) \Leftrightarrow (n = \tilde{\mathtt{S}}i) \vee (n = i\tilde{+}k) \vee (n = i\tilde{\cdot}k))$. Wir wollen nun diese Beschreibung von $\dot{\mathcal{T}}$ in eine Wertverlaufsrekursion der charakteristischen Funktion $\chi_{\dot{\mathcal{T}}}$ des Prädikats $\dot{\mathcal{T}}$ verwandeln. Definiere folgendes Prädikat P über $\mathbb{N}$:

$$P(n, a) \Leftrightarrow (n \in \dot{\mathcal{T}}_{prim} \vee (\exists i, k < n)[((a)_i = (a)_k = 1) \wedge Q(n, i, k)])$$

Nach all dem Bisherigen ist es p.r. Es gilt nun

$$
\begin{aligned}
n \in \dot{\mathcal{T}} \quad &\Leftrightarrow \quad ((n \in \dot{\mathcal{T}}_{prim}) \vee (\exists i, k < n)[i, k \in \dot{\mathcal{T}} \wedge Q(n, i, k)] \\
&\Leftrightarrow \quad ((n \in \dot{\mathcal{T}}_{prim}) \vee (\exists i, k < n)[(\chi_{\dot{\mathcal{T}}} i = \chi_{\dot{\mathcal{T}}} k = 1) \wedge Q(n, i, k)]) \\
&\Leftrightarrow \quad ((n \in \dot{\mathcal{T}}_{prim}) \vee (\exists i, k < n)[((\bar{\chi}_{\dot{\mathcal{T}}})_i = (\bar{\chi}_{\dot{\mathcal{T}}})_k = 1) \wedge Q(n, i, k)]) \\
&\Leftrightarrow \quad P(n, \bar{\chi}_{\dot{\mathcal{T}}} n)
\end{aligned}
$$

Wobei im zweitletzten Schritt $\bar{\chi}_{\dot{\mathcal{T}}} n = \langle \chi_{\dot{\mathcal{T}}} 0, \ldots, \chi_{\dot{\mathcal{T}}}(n-1) \rangle$ benutzt wurde. Daraus folgt $\chi_{\dot{\mathcal{T}}} n = 1 \Leftrightarrow \chi_P(n, \bar{\chi}_{\dot{\mathcal{T}}} n) = 1$. Somit gilt

$$
\chi_{\dot{\mathcal{T}}} n = \chi_P(n, \bar{\chi}_{\dot{\mathcal{T}}} n)
$$

und $\chi_{\dot{\mathcal{T}}}$ ist p.r. nach **Oq**, da χ_P p.r. ist. □

Satz 2.2. *Die Menge $\mathcal{L}$ aller Formeln ist primitiv rekursiv.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum vorherigen. Nach der rekursiven Definition von $\mathcal{L}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\varphi \in \mathcal{L} \Leftrightarrow ((\varphi \in \mathcal{L}_{prim}) \vee (\exists \alpha, \beta, x < \varphi)[\alpha, \beta \in \mathcal{L} \wedge x \in \mathcal{V} \\
\wedge ((\varphi = \neg\alpha) \vee (\varphi = (\alpha \wedge \beta)) \vee (\varphi = \forall x \alpha))]).
\end{aligned}
$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{L}_{prim}$ die Menge der Primformeln. Diese ist p.r. da

$$
n \in \dot{\mathcal{L}}_{prim} \Leftrightarrow (\exists i, k < n)[i, k \in \dot{\mathcal{T}} \wedge n = (i \tilde{=} k)]
$$

Wie vorhin können wir die erste dieser beiden Äquivalenzen umschreiben und erhalten eine Beschreibung von $\dot{\mathcal{L}}$, welche wir in eine Wertverlaufsrekursion von $\chi_{\dot{\mathcal{L}}}$ verwandeln wollen. In Analogie zum ersten Schritt definieren wir folgendes p.r. Prädikat über $\mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
P(n, a) \Leftrightarrow (n \in \dot{\mathcal{L}}_{prim} \vee (\exists i, k, j < n)[(a)_i = (a)_k = 1 \wedge j \in \dot{\mathcal{V}} \\
\wedge (n = \tilde{\neg} i \vee n = i \tilde{\wedge} k \vee n = \tilde{\forall}(j, k))])
\end{aligned}
$$

Man zeigt dann wieder, dass $n \in \dot{\mathcal{L}} \Leftrightarrow P(n, \bar{\chi}_{\dot{\mathcal{L}}} n)$. Ähnlich wie zuvor, haben wir dann dass

$$
\chi_{\dot{\mathcal{L}}} n = \chi_P(n, \bar{\chi}_{\dot{\mathcal{L}}} n)
$$

und $\chi_{\dot{\mathcal{L}}}$ ist p.r. nach **Oq**, da χ_P p.r. ist. □

3 Primitive Rekursiviät der Menge der logischen Axiome

In diesem Abschnitt möchten wir zeigen, dass das logische Axiomensystem Λ des Hilbertkalküls $\mid\!\sim$ der Prädikatenlogik bezogen auf unsere Sprache $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ar}$, p.r. ist. Dabei ist Λ definiert als die Menge aller Formeln $(\forall x_1 \ldots \forall x_j)\varphi$ für $j \geqslant 0$, wobei $x_1, \ldots, x_j \in \mathcal{V}$ Variablen und $\varphi \in \bigcup_{i=1}^{10} \Lambda_i$ Formel (siehe Vortrag über das Hilbertkalkül der Prädikatenlogik). Dazu müssen wir ein wenig Vorarbeit leisten.

Wir möchten ausgehend von der Substitution $\xi \mapsto \xi\frac{t}{x}$ eine p.r. Funktion $(m, i, k) \mapsto [m]_i^k$ über $\mathbb{N}$ definieren so dass gilt:

$$[\dot{\xi}]_{\dot{x}}^{\dot{t}} = (\dot{\xi\frac{t}{x}}) \qquad \text{für alle } \xi \in \mathcal{T} \cup \mathcal{L},\ x \in \mathcal{V},\ t \in \mathcal{T}. \tag{1}$$

Die Funktion $(m, i, k) \mapsto [m]_i^k$ ist sozusagen die Gödelisierung der Substitution. Die Konstruktion ist rekursiv und geht über zwei Schritte, zuerst für $m \in \dot{\mathcal{T}}$ und anschliessend für $m \in \dot{\mathcal{L}}$. In beiden Schritten wendet man die p.r. Fallunterscheidung über m an. Zunächst setzen wir $[m]_i^k = 0$ falls $m \notin \dot{\mathcal{T}}$.

Sei im ersten Schritt $m \in \dot{\mathcal{T}}$.

- Falls $i \notin \dot{\mathcal{V}}$ oder $k \notin \dot{\mathcal{T}}$ setze $[m]_i^k = 0$.
- Falls $i \in \dot{\mathcal{V}}$, $k \in \dot{\mathcal{T}}$ und $m \in \dot{\mathcal{T}}_{prim}$ (entspricht $x \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}, \xi \in \mathcal{T}_{prim} = \mathcal{V} \cup \{0\}$):

  Setze $\quad [m]_i^k = \begin{cases} k, & \text{falls } m = i \quad (\text{entspricht } \xi\frac{t}{x} = t \text{ falls } \xi = x) \\ m, & \text{falls } m \neq i \end{cases}$.

- Falls $i \in \dot{\mathcal{V}}$, $k \in \dot{\mathcal{T}}$ und $m \in \dot{\mathcal{T}} \backslash \dot{\mathcal{T}}_{prim}$:

  Hier muss man die verschiedenen Möglichkeiten für m, im Sinne der rekursiven Definition der Menge der Terme, unterscheiden.

  Falls $(\exists m_0 < m)[m_0 \in \dot{\mathcal{T}} \wedge m = \tilde{\mathtt{S}} m_0]$, setze $[m]_i^k = \tilde{\mathtt{S}}[m_0]_i^k$. Das ist wohldefiniert, da m_0 über $\tilde{\mathtt{S}}$ eindeutig durch m festgelegt ist.

  Falls $(\exists m_1, m_2 < m)[m_1, m_2 \in \dot{\mathcal{T}} \wedge m = m_1 \tilde{+} m_2]$, setze $[m]_i^k = [m_1]_i^k \tilde{+} [m_2]_i^k$. Ähnlich wie zuvor ist auch dies wohldefiniert, da m_1, m_2 nach Definition von $\tilde{+}$ durch eben dieses $\tilde{+}$ festgelegt sind.

  Falls $(\exists m_1, m_2 < m)[m_1, m_2 \in \dot{\mathcal{T}} \wedge m = m_1 \tilde{\cdot} m_2]$, setze $[m]_i^k = [m_1]_i^k \tilde{\cdot} [m_2]_i^k$.

Die Unterscheidung in diese drei Fälle ist wohldefiniert, es kann jeweils nur einer eintreffen. Denn wir erinnern daran, dass nach Definition $\tilde{\mathtt{S}} n = \dot{\mathtt{S}} * n$, $n \tilde{+} m =$

$\dot{+} * n * m$ und $n \tilde{\cdot} m = \dot{\cdot} * n * m$ gilt. Das heisst, dass das Funktionssymbol immer zu Beginn der Zeichenfolge auftritt und somit ist die Einteilung in die drei Fälle eindeutig. Nach Konstruktion ist $(m, i, k) \mapsto [m]_i^k$ p.r. Nach Definition der Substitution $\xi \frac{t}{x}$ (Vortrag L-Strukturen und Syntax der Prädikatenlogik) und den Erklärungen am Anfang von Abschnitt 2, erhalten wir auch, dass (1) zunächst für alle $\xi \in \mathcal{T}$ erfüllt ist. Erfülle beispielsweise $\xi \in \mathcal{T}$, dass $\xi = +\xi_1\xi_2$ gilt mit $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{T}$, und nehmen wir weiter an, dass (1) für ξ_1, ξ_2 erfüllt ist. Dann haben wir $\dot{(\xi \frac{t}{x})} = \dot{((+\xi_1\xi_2)\frac{t}{x})} = \dot{(+(\xi_1 \frac{t}{x}\xi_2 \frac{t}{x}))} = \dot{+} * \dot{(\xi_1 \frac{t}{x})} * \dot{(\xi_2 \frac{t}{x})} = \dot{(\xi_1 \frac{t}{x})} \tilde{+} \dot{(\xi_2 \frac{t}{x})} = [\dot{\xi_1}]_{\dot{x}}^{\dot{t}} \tilde{+} [\dot{\xi_2}]_{\dot{x}}^{\dot{t}} = [\dot{\xi}]_{\dot{x}}^{\dot{t}}$.

Im zweiten Schritt verändern wir die Definition von $[m]_i^k$ so, dass (1) auch für $\xi \in \mathcal{L}$ erfüllt ist (bis jetzt haben wir nämlich in diesem Fall, d.h. $m \in \dot{\mathcal{L}}$, $[m]_i^k = 0$ gesetzt). Sei also $m \in \dot{\mathcal{L}}$.

- Falls $i \notin \dot{\mathcal{V}}$ oder $k \notin \dot{\mathcal{T}}$ setze $[m]_i^k = 0$.
- Falls $i \in \dot{\mathcal{V}}$, $k \in \dot{\mathcal{T}}$:

  Hier muss man wieder die verschiedenen Möglichkeiten für m unterscheiden.

  Falls $m \in \dot{\mathcal{L}}_{prim}$, dann heisst das für unsere gewählte Sprache, dass $m = \dot{(t_1 = t_2)}$ mit $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$. Setze $[m]_i^k = ([\dot{t_1}]_i^k \tilde{=} [\dot{t_2}]_i^k)$ (entspricht $(t_1 = t_2)\frac{t}{x} = (t_1 \frac{t}{x} = t_2 \frac{t}{x})$). Hier benutzt man Schritt 1 für $[\dot{t_1}]_i^k, [\dot{t_2}]_i^k$.

  Falls $(\exists m_0 < m)[m_0 \in \dot{\mathcal{L}} \wedge m = \tilde{\neg} m_0]$ setze $[m]_i^k = \tilde{\neg}[m_0]_i^k$. Wie im in Schritt 1 ist das wohldefiniert, da m_0 nach Definition von $\tilde{\neg}$ dadurch festgelegt ist.

  Falls $(\exists m_1, m_2 < m)[m_1, m_2 \in \dot{\mathcal{L}} \wedge m = m_1 \tilde{\wedge} m_2]$, setze $[m]_i^k = [m_1]_i^k \tilde{\wedge} [m_2]_i^k$. Wiederum ist dies wohldefiniert.

  Falls $(\exists m_3 < m, b \in \dot{\mathcal{V}})[m_3 \in \dot{\mathcal{L}} \wedge m = \tilde{\forall}(b, m_3)]$,

  setze $[m]_i^k = \begin{cases} \tilde{\forall}(b, m_3), & \text{falls } i \neq b \\ \tilde{\forall}(b, [m_3]_i^k), & \text{falls } i = b \end{cases}$.

Wieder ist die Unterscheidung in diese Fälle wohldefiniert. Wir bemerken, dass auch das Auftauchen von mehreren $\wedge$-Symbolen kein Problem darstellt. Im Vortrag über L-Strukturen und Syntax der Prädikatenlogik war mit α, β Formeln auch $(\alpha \wedge \beta)$ eine Formel (inklusive Klammern!). Somit ist beispielsweise $\xi = ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$. Die Klammern werden bei der Gödelisierung berücksichtigt (siehe dazu die Definition von $\tilde{\wedge}$). Nach der Gödelisierung wird im Beispiel $\xi = ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$ das zweite $\wedge$ zuerst betrachtet, denn $(\alpha \wedge \beta)$ und γ sind Formeln; das erste $\wedge$ kommt nicht in Frage, da links und rechts davon keine Formeln stehen.

Alle diese Erklärungen sind eigentlich durch die Definition der Substitution $\xi \frac{t}{x}$ festgelegt, wenn man die Eigenschaft (1) fordert. Damit und durch die am Anfang von Abschnitt 2 gewählten Bezeichnungen und Eigenschaften, erreicht man genau (1) wie man leicht nachrechnen kann. Wir wollen dieses Resultat separat festhalten, da es für den Beweis des Fixpunktlemmas in Kapitel 6.5 wichtig sein wird.

Lemma 3.1. *Die oben definierte Funktion* $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}, (m, i, k) \mapsto [m]_i^k$ *ist p.r. und erfüllt* $[\dot{\xi}]_{\dot{x}}^{\dot{t}} = (\xi \frac{t}{x})^{\cdot}$ $\forall \xi \in \mathcal{T} \cup \mathcal{L}, x \in \mathcal{V}, t \in \mathcal{T}$.

Beweis. □

Bevor wir zum zentralen Punkt dieses Abschnitts kommen, bemerken wir noch, dass die Prädikate '$x \in var\, \xi$', '$x \in gbd\, \varphi$', '$x \in frei\, \varphi$' und '$\varphi, \frac{t}{x}$ *kollisionsfrei*', wobei $\xi, t \in \mathcal{T} \cup \mathcal{L}, \varphi \in \mathcal{L}$, allesamt p.r. sind, denn

$$\begin{aligned} x \in var\, \xi &\Leftrightarrow x \in \mathcal{V} \wedge (\exists \eta, \theta \leqslant \xi)[\xi = \eta x \theta] \\ x \in gbd\, \varphi &\Leftrightarrow x \in \mathcal{V} \wedge (\exists \eta, \theta \leqslant \xi)[\xi = \eta \forall x \theta] \\ x \in frei\, \varphi &\Leftrightarrow x \in \mathcal{V} \wedge \varphi \tfrac{0}{x} \neq \varphi \qquad (\Leftrightarrow x \in \mathcal{V} \wedge [\dot{\varphi}]_{\dot{x}}^{\dot{0}} \neq \dot{\varphi}) \\ \varphi, \tfrac{t}{x}\, \textit{kollisionsfrei} &\Leftrightarrow (\forall y < \varphi)[(y \in gbd\, \varphi \wedge y \in var\, t) \Rightarrow y = x] \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir, dass die Menge der Variablen $\mathcal{V}$ wie schon weiter oben erwähnt p.r. ist, sowie die Resultate zu p.r. Funktionen im dazugehörigen Vortrag und schliesslich die primitive Rekursivität des gerade definierten $[m]_i^k$. Nun kommen wir endlich zum Resultat dieses Abschnitts.

Satz 3.2. *Die Menge* Λ *der logischen Axiome bezogen auf die Sprache* $\mathcal{L}$ *ist primitiv rekursiv.*

Beweis. Die Prädikate '$\varphi \in \Lambda_1$', ..., '$\varphi \in \Lambda_4$' können alle auf ähnliche Weise als p.r. erkannt werden. Beispielsweise gilt für Λ_1

$$\begin{aligned} \varphi \in \Lambda_1 \Leftrightarrow (\exists \alpha, \beta, \gamma < \varphi)[&\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{L} \\ &\wedge \varphi = ((\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))]. \end{aligned}$$

Entsprechend umgeschrieben haben wir

$$\begin{aligned} n \in \dot{\Lambda}_1 \Leftrightarrow (\exists i, k, m < n)[&i,k,m \in \dot{\mathcal{L}} \\ &\wedge n = ((i \tilde{\to} k \tilde{\to} m) \tilde{\to} (i \tilde{\to} k) \tilde{\to} (i \tilde{\to} m))], \end{aligned}$$

was Λ_1 als p.r. kennzeichnet. Für $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ läuft es analog. Für Λ_5 benützt man, dass

$$\begin{aligned} \varphi \in \Lambda_5 \Leftrightarrow (\exists \alpha, x, t < \varphi)[&\alpha \in \mathcal{L} \wedge x \in \mathcal{V} \wedge t \in \mathcal{T} \\ &\wedge (\varphi = (\forall x \alpha \to \alpha \tfrac{t}{x})) \wedge (\alpha, \tfrac{t}{x}\, \textit{kollisionsfrei})]. \end{aligned}$$

Hier fehlt noch die primitive Rekursivität des Prädikats '$\varphi = (\forall x\alpha \to \alpha\frac{t}{x})$', doch diese erhält man direkt durch Anwendung der primitiven Rekursivität des eben konstruierten $[m]_i^k$. Genauso verfährt man mit $\Lambda_6, \ldots, \Lambda_{10}$. Wir erhalten also, dass das Prädikat '$\varphi \in \Lambda_0 := \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_{10}$' p.r. ist. Daraus wollen wir nun auf die primitive Rekursivität von Λ schliessen:
Ein $\varphi \in \Lambda$ lässt sich schreiben als $\varphi = (\forall x_1 \ldots \forall x_j)\varphi_0$ mit $x_1, \ldots, x_j \in \mathcal{V}, \varphi_0 \in \Lambda_0$. Somit gilt

$$\begin{aligned} n \in \dot{\Lambda} \Leftrightarrow (n \in \dot{\mathcal{L}} \wedge (\exists m, k < n)[(n = m * k) \wedge (k \in \dot{\Lambda}_0) \wedge (2 \mid lm) \\ \wedge (\forall i < lm)[(2 \mid i \wedge (m)_i = \#\forall) \vee (2 \nmid i \wedge (\exists a \leqslant n)[(m)_i = \#\boldsymbol{v}_a])]]). \end{aligned}$$

Im Beispiel $\varphi = (\forall x_1 \ldots \forall x_j)\varphi_0$ von oben ist $n = \dot{\varphi}$, $m = (\forall x_1 \dot{\ldots} \forall x_j)$, $k = \dot{\varphi}_0$ und $lm = 2j$. Letzteres erklärt wieso $2 \mid lm$. Auch sehen wir anhand von m, dass die zweite Zeile der obigen Formel nichts anderes besagt, als dass sich im Ausdruck wovon m die Gödelzahl ist, immer ein $\forall$-Symbol und ein Variablensymbol abwechseln. Dabei ist $a \leqslant n$, denn es gilt für die betreffende Variable sicher $n > m \geqslant p^{1+\#\boldsymbol{v}_a} \geqslant a$ für eine Primzahl p .

Diese Charakterisierung von $\dot{\Lambda}$ zeigt nach all den Vorbetrachtungen, dass Λ p.r. ist, wobei wir noch die offensichtliche primitive Rekursivität der Funktion $a \mapsto \#\boldsymbol{v}_a = 21 + 2a$ verwenden. □

4 Primitive Rekursivität bzw. Rekursivität zweier Beweisbarkeitsprädikate

In diesem letzten Abschnitt geht es um die Gödelisierung des formalen Beweisens im Hilbertkalkül der Prädikatenlogik.

Definition 4.1. Für eine Formelfolge $\Phi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{L}^{n+1}$ sei $\dot{\Phi} := \langle \dot{\varphi}_0, \ldots, \dot{\varphi}_n \rangle$ deren Gödelzahl. Das betrifft speziell den Fall, wo Φ ein Beweis aus $X \subseteq \mathcal{L}$ ist (im Sinne des Vortrages über das Hilbertkalkül der Prädikatenlogik), der in der Regel auch Formeln aus Λ enthält.

Wir bemerken als erstes, dass für jede Wahl von $\Phi \in \mathcal{L}^{n+1}$ und $\xi \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ nichtleer stets $\dot{\Phi} \neq \dot{\xi}$ gilt; denn für die 0-te Komponente gilt einerseits $(\dot{\Phi})_0 = \dot{\varphi}_0$, was als nichtleere Gödelzahl durch zwei teilbar ist, während andererseits $(\dot{\xi})_0$ als Nummer des ersten Zeichens von ξ ungerade ist.

Sei nun $T \subseteq \mathcal{L}^0$ eine durch ein Axiomensystem $X \subseteq T$ gegebene Theorie, beispielsweise PA. Für einen Beweis $\Phi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ aus X schreiben wir auch, Φ sei *ein Beweis in T*. Wir wollen folgende drei Prädikate betrachten

- 'Φ *ist ein Beweis in T*'

- 'Φ *ist ein Beweis für* α' (wobei α die letzte Komponente von Φ ist)
- '*es gibt einen Beweis für* α *in* T'

Diesen drei Prädikaten entsprechen folgende Prädikate über $\mathbb{N}$:

- $beweis_T(b) :\Leftrightarrow (b \in Gz \wedge b \neq 1$
$$\wedge\ (\forall k < lb)[(b)_k \in \dot{X} \cup \dot{\Lambda} \vee (\exists i, j < k)[(b)_i = (b)_j \tilde{\rightarrow} (b)_k]])$$
- $bew_T(b, a) :\Leftrightarrow beweis_T(b) \wedge a = (b)_{last}$
- $bwb_T(a) :\Leftrightarrow \exists b\ bew_T(b, a)$

dabei entspricht b dem Φ und a dem α. Die Funktion $(b)_{last}$ bezeichnet die letzte *Komponente* von b. Sie ist p.r., da $(b)_{last} = (b)_{lb \dot{-} 1}$ für $\dot{-}$ die p.r. gestutzte Subtraktion (siehe Vortrag über primitive Funktionen).

Nun zeigen wir als letztes Resultat, dass die Beweisbarkeitsprädikate 'Φ *ist ein Beweis in* T' und 'Φ *ist ein Beweis für* α' unter gewissen Voraussetzungen p.r sind.

Satz 4.2. *Sei* $T \subseteq \mathcal{L}^0$ *eine durch ein p.r. Axiomensystem* $X \subseteq T$ *gegebene Theorie über der Sprache* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ar}$*. Dann sind* $beweis_T$ *und* bew_T *p.r.*

Beweis. Nach Definition ist $beweis_T$ p.r., da X (das heisst $\dot{X}$) nach Voraussetzung p.r. ist. Zur Erinnerung ist Gz p.r., wie in der Einführung bemerkt, und nach Satz 3.2. auch $\dot{\Lambda}$. Daraus folgt die primitive Rekursivität von $beweis_T$ mit dem Vortrag Primitive Funktionen. Aus der primitiven Rekursivität von $beweis_T$ folgt sogleich auch die primitive Rekursivität von bew_T. □

Es sei noch erwähnt, dass bwb_T in der Regel nicht p.r. ist, da wir in der Definition von bwb_T keine beschränkte Quantifizierung haben.

Alle Resultate in diesem Vortrag stimmen nicht nur für die Sprache $\mathcal{L}_{ar}$, sondern können für beliebige sogenannte gödelisierbare Sprachen $\mathcal{L}$ formuliert werden. Dabei heisst $\mathcal{L}$ gödelisierbar, falls $\mathcal{L}$ ein genau spezifiziertes Alphabet besitzt, womit die Zeichenfolgen über dem Alphabet durch natürliche Zahlen kodierbar sind.

Literatur

[1] Wolfgang Rautenberg. *Einführung in die Mathematische Logik.* Vieweg-Teubner, 2008. 3, überarbeitete Auflage.