Repräsentierbarkeit arithmetischer Prädikate

Michael Schatz

9. Mai 2012

Dieses Handout richtet sich nach Kapitel 6.3 in [R], wobei es 2 wesentliche Änderungen zu beachten gilt:

(a) Rautenberg arbeitet mit der Theorie Q, einer Subtheorie von PA. Wir werden die Ergebnisse nur für die Peano-Arithmetik PA formulieren.

(b) Wir unterlassen die Klassifizierung von Formeln in $\Delta_0, \Delta_1, \Sigma_1$ und Π_1-Formeln, da dies für den Beweis des 1. Unvollständigkeitssatzes keine Notwendigkeit darstellt.

Notation. Wie bereits in vorherigen Vorträgen bezeichnen $f, g, h \in \mathbf{F}_n$ für $n \geqslant 0$ n-stellige Funktionen $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $P, Q, V \subseteq \mathbb{N}^n$ n-stellige Prädikate, auch arithmetische Funktionen und Prädikate genannt. Zudem werden wie in [R] die Symbole $\boldsymbol{Oc}, \boldsymbol{Op}$ und $\boldsymbol{O\mu}$ für die Vorschriften zur Erzeugung rekursiver Funktionen verwendet. Wir arbeiten mit der Peano-Arithmetik in der Sprache $\mathcal{L}_{ar} = \{0, \mathsf{S}, +, \cdot\}$. Die Axiome der Peano-Arithmetik, die in Vortrag 9 definiert wurden, werden wir zur Erinnerung noch einmal auflisten.

(P1) $\forall x \quad \mathsf{S}x \neq 0$

(P2) $\forall x \quad x + 0 = 0$

(P3) $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$

(P4) $\forall xy \quad \mathsf{S}x = \mathsf{S}y \to x = y$

(P5) $\forall xy \quad x + \mathsf{S}y = \mathsf{S}(x + y)$

(P6) $\forall xy \quad x \cdot \mathsf{S}y = x \cdot y + x$

(IS) $\left(\phi\frac{0}{x} \wedge \forall x \left(\phi \to \phi\frac{\mathsf{S}x}{x}\right)\right) \to \forall x \phi$

Für $\vdash_{\mathsf{PA}}$ schreiben wir durchwegs $\vdash$, für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\underline{n}$ den Term $\mathsf{S}^n 0$ in PA. Die Schlussregeln für prädikatenlogisches Folgern[1] gelten aufgrund des Vollständigkeitssatzes auch für $\vdash$ und werden im Folgenden mit (SR) bezeichnet. Zudem wurde $x \leqslant y$ definiert als $\exists z\ x + z = y$ und $x < y$ als $x \leqslant y \wedge x \neq y$.

Ziel/Aufbau. Nachdem wir in den letzten beiden Vorträgen rekursive Funktionen und Prädikate definiert und die arithmetischen Prädikate $beweis_T, bew_T$ und bwb_T eingeführt haben, versuchen wir jetzt, solche Funktionen und Prädikate in PA durch Formeln zu beschreiben. Wir werden in diesem und im nächsten Vortrag zeigen, dass dies für alle rekursiven Prädikate und Funtionen möglich

[1] siehe [R], Seite 62

ist - also auch für bew_T (das nach dem letzten Vortrag p.r. ist) und die (noch zu definierende) Substitutionsfunktion sb_x. Dies wird das Herzstück der beiden Beweise des Unvollständigkeitssatzes bilden.
Da wir Prädikate und Funktionen über $\mathbb{N}$ beschreiben wollen, untersuchen wir zunächst, ob sich unsere Repräsentation $n \mapsto \underline{n}$ wünschenswert verhält:

Proposition 1. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

(C0) $\vdash \mathsf{S}x + \underline{n} = x + \mathsf{S}\underline{n}$

(C1) $\vdash \underline{m} \circ \underline{n} = \underline{m \circ n} \quad \circ \in \{+, \cdot\}$

(C2) $\vdash \underline{n} \neq \underline{m}$ wenn $n \neq m$

(C3) $\vdash \underline{m} \leqslant \underline{n}$ wenn $m \leqslant n$

(C4) $\vdash \underline{m} \nleqslant \underline{n}$ wenn $m \nleqslant n$

(C5) $x \leqslant \underline{n} \vdash x = \underline{0} \vee \cdots \vee x = \underline{n}$

(C6) $\vdash x \leqslant \underline{n} \vee \underline{n} \leqslant x$

Beweis. Rautenberg beweist diese Eigenschaften mit Ausnahme von (C4) in der Theorie Q auf Seite 183 in [R]. Da Q eine Subtheorie von PA ist, sind die Beweise in der selben Manier in PA ableitbar. Wichtig bei den Beweisen ist die Idee der Metainduktion, deren Funktionsweise im folgenden Beweis von (C4) klar wird.

(C0): bewiesen in Vortrag 9
(C1)-(C3),(C5)-(C6): siehe [R]
(C4): Aus $m \nleqslant n$ folgt $m > 0$ und damit $m = k + 1$, also

$$\vdash \underline{m} = \underline{k+1} \vdash \underline{m} = \mathsf{S}\underline{k}$$

Deswegen gilt

$$\exists y\ \underline{m} + y = 0 \vdash \exists y\ \mathsf{S}\underline{k} + y = 0 \overset{(P5)}{\vdash} \exists y\ \mathsf{S}(\underline{k} + y) = 0 \overset{(P1)}{\vdash} \bot$$

und mit reductio ad absurdum $\forall y\ \underline{m} + y \neq 0 \equiv \underline{m} \nleqslant 0$. Dies beweist den Induktionsanfang ($n = 0$).
Für den Induktionsschritt bemerken wir zunächst

$$\mathsf{S}x \leqslant \mathsf{S}y \overset{\text{Def}}{\vdash} \exists z\ z + \mathsf{S}x = \mathsf{S}y \overset{(P5)}{\vdash} \exists z\ \mathsf{S}(x + z) = \mathsf{S}y \overset{(P4)}{\vdash} x \leqslant y \tag{1}$$

und nehmen an, die Aussage gelte für n. Ist nun $m \nleqslant n+1$, gilt auch $m - 1 \nleqslant n$ und damit

$$\overset{(IA)}{\vdash} \underline{m-1} \nleqslant \underline{n} \overset{(1)}{\vdash} \underline{m} \nleqslant \underline{n+1},$$

wobei die Kontraposition von (1) verwendet wird.

□

Nach dieser vorbereitenden Proposition wenden wir uns nun der zentralen Definition in diesem Vortrag zu:

Definition 2. Wir nennen ein Prädikat $P \subseteq \mathbb{N}^n$ *repräsentierbar* in PA, wenn es eine Formel $\alpha(\vec{x})$ gibt, sodass gilt:

$$R^+ : P\vec{a} \Rightarrow \vdash \alpha(\underline{\vec{a}}) \quad \text{und} \quad R^- : \neg P\vec{a} \Rightarrow \vdash \neg\alpha(\underline{\vec{a}}) \tag{2}$$

Eine Funktion $f \in \mathbf{F}_n$ heisst repräsentierbar, wenn es eine Formel $\phi(\vec{x}, y)$ gibt, sodass für alle $\vec{a} \in \mathbb{N}^n$ gilt:

$$R^+ : \vdash \phi(\underline{\vec{a}}, \underline{f\vec{a}}) \quad \text{und} \quad R^= : \phi(\underline{\vec{a}}, y) \vdash y = \underline{f\vec{a}} \tag{3}$$

Gilt R^+ für eine Funktion f, schreiben wir R_f^+. Genauso verwenden wir $R_f^=$, R_P^+ und R_P^-.

Bemerkung 3.

(a) R^+ können wir auch schreiben als $y = \underline{f\vec{a}} \vdash \phi(\underline{\vec{a}}, y)$ und erhalten damit eine einzige Bedingung

$$y = \underline{f\vec{a}} \equiv \phi(\underline{\vec{a}}, y) \qquad \text{für alle } \vec{a} \in \mathbb{N}^n. \tag{4}$$

(b) Man kann sogar noch weitergehen und die Definition für Repräsentierbarkeit von Funktionen ganz unterschlagen, indem man sagt, f sei repräsentierbar, wenn *graph* f als Prädikat in $\mathbb{N}^{n+1}$ repräsentierbar ist. Denn ist f durch ein ϕ repräsentiert, dann mit demselben ϕ auch *graph* f (dies folgt direkt aus (4) und (C2)). Umgekehrt können wir durch beschränkte Quantifizierung aus einer repräsentierenden Formel für *graph* f eine für f bilden, siehe Lemma 7.

Bevor wir erste Ergebnisse formulieren können, brauchen wir folgende Definition:

Definition 4. Für eine Formel $\alpha(z)$ stehe der Ausdruck $(\exists z \leqslant y)\alpha(z)$ sinngemäss für die Formel $\exists z(z \leqslant y \wedge \alpha(z))$. In derselben Manier schreiben wir $(\forall z \leqslant y)\alpha(z)$ für $\forall z(z \leqslant y \to \alpha(z)) \equiv \forall z(z \nleqslant y \vee \alpha(z))$.

Ein erstes einfaches Ergebnis ist das folgende

Lemma 5. Gegeben sei ein Prädikat P und die Prädikate Q und V definiert durch

$$Q(\vec{a}, b) :\Leftrightarrow (\exists c \leqslant b)P(\vec{a}, c) \quad \text{und} \quad V(\vec{a}, b) :\Leftrightarrow (\forall c \leqslant b)P(\vec{a}, c).$$

Ist P repräsentiert durch $\alpha(\vec{x}, y)$ und $z \notin \mathit{frei}\,\alpha$, dann sind Q und V repräsentiert durch

$$(\exists z \leqslant y)\alpha(\vec{x}, z) \quad \text{und} \quad (\forall z \leqslant y)\alpha(\vec{x}, z)$$

Die selben Aussagen gelten mit '$<$' statt '$\leqslant$'.

Beweis.
R_P^+: Sei $(\vec{a}, b) \in Q$, also $(\vec{a}, c) \in P$ für ein $c \leqslant b$. Dann ist mit (C3)

$$\overset{R_P^+}{\vdash} \alpha(\underline{\vec{a}}, \underline{c}) \wedge \underline{c} \leqslant \underline{b} \overset{\text{(SR)}}{\vdash} (\exists z \leqslant \underline{b})\alpha(\underline{\vec{a}}, z).$$

R_P^-: Sei nun $(\vec{a}, b) \notin Q$, also $(\forall c \leqslant b)\neg P(\vec{a}, c)$. Dann gilt $(*) \overset{R_P^-}{\vdash} \neg\alpha(\underline{\vec{a}}, \underline{c})$ für alle $c \leqslant b$. Somit gilt

$$z \leqslant \underline{b} \overset{(C5)}{\vdash} \bigvee_{c \leqslant b} z = \underline{c} \overset{(*)}{\vdash} \neg\alpha(\underline{\vec{a}}, z).$$

Daraus folgt $\vdash z \leqslant \underline{b} \to \neg\alpha(\underline{\vec{a}}, z)$ und mit (SR) $\vdash (\forall z \leqslant \underline{b})\neg\alpha(\underline{\vec{a}}, z)$.
Der Beweis für V verläuft nach obigem Schema, denn $(\vec{a}, b) \in V \Leftrightarrow (\forall c \leqslant b)P(\vec{a}, c)$, und die Schlusskette in R_P^- gibt $\vdash (\forall z \leqslant \underline{b})\alpha(\underline{\vec{a}}, z)$. Genauso gilt $(\vec{a}, b) \notin V \Leftrightarrow \neg(\exists c \leqslant b)\neg P(\vec{a}, c)$ und wir können wie in R_P^+ verfahren.
Die Beweise für $<$ entsprechen den obigen unter Beachtung der Definition $x < y \leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y$. □

In Lemma 7 und 8 werden wir allgemein zeigen, welche Klassen von Funktionen und Prädikate repräsentierbar sind. Zuvor betrachten wir noch einige konkrete Beispiele:

Beispiel 6.

(a) Die *Identitätsrelation* $id = \{(a, a) | \, a \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2$ wird repräsentiert durch $x = y$. Die Eigenschaft R^+ gilt, da nach Definition $\vdash \underline{a} = \underline{b}$ für $a = b$, und R^-, da $\vdash \underline{a} \neq \underline{b}$ für $a \neq b$ nach (C2).

(b) Nach den Aussagen (C3) und (C4) wird das Prädikat '$\leqslant$' (gemeint ist $\{(a, b) | \, a \leqslant b\} \subseteq \mathbb{N}^2$) repräsentiert durch die Formel $x \leqslant y$.

(c) Die *Teilbarkeitsrelation* $a|b$ lässt sich definieren als $Q(a, b) := (\exists c \leqslant b)P(a, b, c)$ mit $P := \{(a, b, c) | \, a \cdot c = b\}$. Nach (C1) und (C2) ist P durch $\alpha(x, y, z) := x \cdot z = y$ repräsentiert und Q nach Lemma 5 durch $(\exists v \leqslant y)\alpha(x, y, v)$.[2]

Die Beweise in folgenden Lemmata sind durchwegs konstruktiv, wir zeigen also die Repräsentierbarkeit von Funktionen und Prädikaten durch explizite Angabe einer repräsentierenden Formel.

Lemma 7.

(a) Das Prädikat $P \in \mathbb{N}^{n+1}$ sei repräsentiert durch $\alpha(\vec{x}, y)$. Gilt $\forall\vec{a}\exists b P(\vec{a}, b)$, dann wird $f : \vec{a} \mapsto \mu b[P(\vec{a}, b)]$ repräsentiert durch

$$\phi(\vec{x}, y) := \alpha(\vec{x}, y) \wedge (\forall z < y)\neg\alpha(\vec{x}, z).$$

Insbesondere ist die Menge aller repräsentierbaren Funktionen abgeschlossen unter $\boldsymbol{O\mu}$.

(b) Eine Funktion f ist repräsentierbar genau dann, wenn *graph* f repräsentierbar ist.

[2]Hier kommt b sowohl als Beschränkung beim Quantifizieren, als auch im Prädikat P vor; dies ändert allerdings nichts an der Gültigkeit von Lemma 5, nur an der Notation.

(c) Ein Prädikat ist repräsentierbar, wenn seine charakteristische Funktion χ_P es ist.[3]

Beweis.
(a) Wir überprüfen (3) für ϕ:
R^+_ϕ: Nach Definition von f ist $(\vec{a}, f\vec{a}) \in P$, also $\vdash \alpha(\underline{\vec{a}}, \underline{f\vec{a}})$ nach R^+_P. Ausserdem gilt $(\vec{a}, f\vec{a}) \in Q := (\forall z < y)\neg P(\vec{a}, z)$, also nach Lemma (5) und R^+_Q auch $\vdash (\forall z < \underline{f\vec{a}})\neg\alpha(\underline{\vec{a}}, z)$. Also insgesamt $\vdash \phi(\underline{\vec{a}}, \underline{f\vec{a}})$.
$R^=_\phi$: Wir definieren $b := f\vec{a}$. Dann folgern wir einerseits nach Definition von f und b:

$$\underline{b} < y \overset{R^+_P}{\vdash} \alpha(\underline{\vec{a}}, \underline{b}) \wedge (\underline{b} < y) \overset{\text{(SR)}}{\vdash} (\exists z < y)\alpha(\underline{\vec{a}}, z) \tag{5}$$

und andererseits

$$y < \underline{b} \overset{\text{(C5)}}{\vdash} \bigvee_{i<b} y = \underline{i} \overset{\text{(C2)}}{\vdash} \neg\alpha(\underline{\vec{a}}, y), \tag{6}$$

wobei der letzte Schritt R^- für das Prädikat *graph* f verwendet. Die Kontrapositionen von (5) und (6) ergeben zusammen:

$$\phi(\underline{\vec{a}}, y) \vdash y \not< \underline{b} \wedge \underline{b} \not< y \overset{\text{(C6)}}{\vdash} \underline{b} = y.$$

Bei der letzten Ableitung wird verwendet, dass $y \not< \underline{b} \leftrightarrow \underline{b} \leqslant y \vee y = \underline{b}$ nach Definition von '$<$'.
(b) Wir definieren $P := graph\, f$ und bemerken, dass $\forall\vec{a}\exists b P(\vec{a}, b)$, nämlich $b := f\vec{a}$. Also ergibt sich mit Teil (a), dass

$$f^* : \vec{a} \mapsto \mu b[P(\vec{a}, b)]$$

repräsentierbar ist. Da Funktionen aber ein eindeutiges Bild haben, gilt $f^* = f$. Die andere Richtung wurde in Bemerkung 3, Teil (b) besprochen.
(c) Die Formel ϕ repräsentiere $\chi := \chi_P$. Wir definieren

$$\psi(\vec{x}) := \phi(\vec{x}, \underline{1}) \vee \neg\phi(\vec{x}, 0).$$

Ist nun $\vec{a} \in P$ dann ist $\chi(\vec{a}) = 1$, also

$$\overset{R^+_\chi}{\vdash} \phi(\underline{\vec{a}}, \underline{1}) \overset{\text{Def}}{\vdash} \psi(\underline{\vec{a}}).$$

Für $\vec{a} \notin P$ haben wir $\chi(\vec{a}) = 0$ und

$$\chi(\vec{a}) = 0 \overset{R^+_\chi}{\vdash} \phi(\underline{a}, 0) \overset{R^=_\chi}{\vdash} \neg\phi(\underline{\vec{a}}, \underline{1}) \wedge \phi(\underline{\vec{a}}, 0) \equiv \neg\psi(\underline{\vec{a}}).$$

□

Lemma 8.

[3] auch die Umkehrung gilt, vgl. Übungsbeispiel 3 auf Seite 188 in [R]

(a) Ein k-stelliges Prädikat P und Funktionen $g_i \in \mathbf{F}_n$ für $i = 1, \ldots, k$ seien repräsentiert durch $\alpha(\vec{y})$ resp. $\gamma_i(\vec{x}, y_i)$. Dann wird das Prädikat $Q := P[g_1, \ldots, g_k]$ repräsentiert durch

$$\beta(\vec{x}) := \exists \vec{y}\, [\alpha(\vec{y}) \wedge \bigwedge_i \gamma_i(\vec{x}, y_i)].$$

(b) Sei nun $h \in \mathbf{F}_k$ repräsentiert durch $\beta(\vec{x}, z)$ und g_i definiert und repräsentiert wie oben. Dann wird $f = h[g_1, \ldots, g_k]$ repräsentiert durch

$$\zeta(\vec{x}, z) := \exists \vec{y}\, [\beta(\vec{y}, z) \wedge \bigwedge_i \gamma_i(\vec{x}, y_i)].$$

Insbesondere ist die Menge aller repräsentierbaren Funktionen abgeschlossen unter $\boldsymbol{Oc}$.

Beweis.
Der Beweis von (a) wird in [R] detailiert ausgefürt und verläuft zudem ähnlich wie der Beweis von:
(b) Wegen R^+_ϕ und $R^+_{\gamma_i}$ wissen wir, dass für $b_i := g_i\vec{a}$

$$\vdash \beta(\underline{\vec{b}}, \underline{h\vec{b}}) \wedge \bigwedge_i \gamma_i(\underline{\vec{a}}, \underline{b_i}).$$

Mit $\underline{h\vec{b}} = \underline{f\vec{a}}$ und (SR) folgt $\vdash \zeta(\underline{\vec{a}}, \underline{f\vec{a}})$ und damit R^+.
Für $R^=$ definieren wir wieder $b_i := g_i\vec{a}$ und erhalten mit (SR), genauer mit vorderer Partikularisierung,

$$\begin{aligned}
\phi(\underline{\vec{a}}, z) &= \exists\, \vec{y}\, [\beta(\vec{y}, z) \wedge \bigwedge_i \gamma_i(\underline{\vec{a}}, y_i)] \\
&\overset{R^=_{\gamma_i}}{\vdash} \exists\, \vec{y}\, [\beta(\vec{y}, z) \wedge \bigwedge_i y_i = \underline{g_i\vec{a}}] \\
&\overset{R^=_\beta}{\vdash} \exists\, \vec{y}\, \Big[z = \underline{h[g_1\vec{a}, \ldots, g_k\vec{a}]}\Big] \vdash z = \underline{f\vec{a}}.
\end{aligned}$$

□

Um zu zeigen, dass die rekursiven Funktionen repräsentierbar sind, müssen wir also noch zeigen, dass die Anfangsfunktionen repräsentierbar sind und die Menge der repräsentierbaren Funktionen abgeschlossen ist unter $\boldsymbol{Op}$. Dies erfordert jedoch etwas mehr Arbeit und wird im nächsten Vortrag besprochen.

Literatur

[R] Wolfgang Rautenberg: *Einführung in die mathematische Logik*, Vieweg-Teubner, 2008