GÖDELS ERSTER UNVOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

STEPHAN TORNIER

Zusammenfassung. Dieser Artikel wurde im Rahmen des ETH-Seminars über Mathematische Logik im Frühjahrssemester 2012 erstellt und beweist den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz [1] wie in [2, Kap. 6.5].

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz beantwortet die Frage nach der Vollständigkeit gewisser Theorien in negativem Sinne: Zu jeder Theorie einer bestimmten Klasse gibt es eine unabhängige Aussage, d.h. eine Aussage, die mit der Theorie weder bewiesen noch widerlegt werden kann.

Konkret betrachten wir hier die Formelmengen $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_{ar}$ und konsistente Theorien $T \supseteq \mathsf{PA}$, die ein primitiv rekursives Axiomensystem gestattet, d.h., solche Theorien, die den Ergebnissen vorangehender Vorträge [3] über die Repräsentierbarkeit gewisser Prädikate zugänglich sind.

Zur Vereinfachung des Beweises des 1. Unvollständigkeitssatzes verschärfen wir die Forderung der Konsistenz zu jener der ω-Konsistenz im Sinne von Definition 1.

Definition 1 (ω-Konsistenz). Eine Theorie T in $\mathcal{L}_{ar}$ heißt *ω-konsistent*, falls für alle $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{L}_{ar}$ mit $\vdash_T \exists x\varphi(x)$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\nvdash_T \neg\varphi(\underline{n})$.

Beispiel. Die Theorie PA ist ω-konsistent. Da nämlich $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, \mathsf{S}, +, \cdot)$ ein Modell für PA ist, implizierten $\vdash_{\mathsf{PA}} \exists x\varphi$ und $\vdash_{\mathsf{PA}} \neg\varphi(\underline{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ den Widerspruch $\mathcal{N} \models \exists x\varphi, \forall x\neg\varphi$.

Der erste Unvollständigkeitssatz lässt sich nun wie folgt formulieren.

Satz 2 (Gödels Erster Unvollständigkeitssatz). Jede durch ein primitiv rekursives Axiomensystem X axiomatisierte, (ω-)konsistente Theorie $T \supseteq \mathsf{PA}$ ist unvollständig; d.h., es gibt eine Aussage $\gamma \in \mathcal{L}^0_{ar}$, sodass weder $\vdash_T \gamma$ noch $\vdash_T \neg\gamma$ gilt. Es gibt zudem eine primitiv rekursive Funktion, die einer X repräsentierenden Formel ein solches γ zuordnet.

Der Beweis des 1. Unvollständigkeitssatzes beruht maßgebend auf dem Fixpunktlemma 4, das wir für gödelisierbare Theorien formulieren, d.h. solche Theorien, die wie PA eine Gödelisierung gestatten.

Definition 3 (Gödelisierbarkeit). Eine Theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ heißt *gödelisierbar*, falls $\mathcal{L}$ gödelisierbar ist und eine Folge $(\underline{n})_{n\in\mathbb{N}}$ variablenfreier Terme in $\mathcal{L}$ existiert, sodass $\vdash_T \underline{n} \neq \underline{m}$ und die Funktion $\mathrm{zf} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \dot{\underline{n}}$ primitiv rekursiv ist.

Beispiel. Die Theorie PA ist gödelisierbar — im Vortrag [3] über die Gödelisierung von Formeln ist eine solche für $\mathcal{L}_{ar}$ explizit angegeben. Auch die Theorie ZFC kann gödelisiert werden.

Dazu erinnern wir an die für eine Variable $x \in \mathcal{L}_{ar}$ definierte Substitutionsfunktion $\mathrm{sb}_x : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, gewissermaßen die Gödelisierung der Substitution. Ihre definierende Eigenschaft ist als Teil von (sb) angeführt.

Lemma 4 (Fixpunktlemma). Es sei $T \subseteq \mathcal{L}$ eine gödelisierbare Theorie, x eine Variable und sb_x in T repräsentierbar. Dann existiert für jedes $\alpha = \alpha(x) \in \mathcal{L}$ eine Aussage $\gamma \in \mathcal{L}^0$, sodass $\gamma \equiv_T \alpha(\ulcorner\gamma\urcorner)$.

Date: 24. Mai 2012.

Beweis. (Lemma 4). Es seien x_1, x_2, y von x verschiedene Variablen und $\mathtt{sb}(x_1, x_2, y)$ eine sb_x repräsentierende Formel. Per Definition von Repräsentierbarkeit und der Substitutionsfunktion gilt dann für jede Formel $\varphi = \varphi(x) \in \mathcal{L}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$:

(sb) $$\mathtt{sb}(\ulcorner\varphi\urcorner, \underline{n}, y) \equiv_T (y = \underline{\mathrm{sb}_x(\dot\varphi, n)}) \equiv_T (y = \dot{\underline{\varphi(\underline{n})}}) \equiv_T (y = \ulcorner\varphi(\underline{n})\urcorner).$$

Definiere $\beta(x) := \forall y\,(\mathtt{sb}(x, x, y) \to \alpha\frac{y}{x})$. Dann ist $\gamma := \beta(\ulcorner\beta\urcorner)$ ein Fixpunkt von α im Sinne der Aussage des Lemmas, wie die folgende Umformung zeigt:

$$\begin{aligned}\gamma = \forall y \left(\mathtt{sb}(\ulcorner\beta\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner, y) \to \alpha\frac{y}{x}\right) &\overset{\text{(sb)}}{\equiv_T} \forall y \left(y = \ulcorner\beta(\ulcorner\beta\urcorner)\urcorner \to \alpha\frac{y}{x}\right) \\ &= \forall y \left(y = \ulcorner\gamma\urcorner \to \alpha\frac{y}{x}\right) \equiv \alpha(\ulcorner\gamma\urcorner).\end{aligned}$$

□

Beweis. (Satz 2). Es sei bew_T durch $\mathtt{bew}_T$ repräsentiert. Mit $\mathtt{bwb}(x) := \exists y \mathtt{bew}_T(y, x)$ gilt dann gemäß [3] (Repräsentationssatz), für jede Aussage $\varphi \in \mathcal{L}^0_{ar}$:

(1) $$\vdash_T \varphi \;\Rightarrow \vdash_T \mathtt{bwb}(\ulcorner\varphi\urcorner).$$

Ist nun $\gamma \in \mathcal{L}^0_{ar}$ ein Fixpunkt von $\neg\mathtt{bwb}(x)$ gemäß des Fixpunktlemmas 4, so folgt

(2) $$\gamma \equiv_T \neg\mathtt{bwb}(\ulcorner\gamma\urcorner).$$

Wir zeigen, dass γ unabhängig von T ist: Falls $\vdash_T \gamma$, so auch $\vdash_T \mathtt{bwb}(\ulcorner\gamma\urcorner)$ nach (1). Dann ist nach (2) aber $\vdash_T \neg\mathtt{bwb}(\ulcorner\gamma\urcorner)$ ein Widerspruch zur Konsistenz von T. Also $\nvdash_T \gamma$. Angenommen, $\vdash_T \neg\gamma$. Dann gilt auch $\vdash_T \mathtt{bwb}(\ulcorner\gamma\urcorner)$ nach (2), also

(3) $$\vdash_T \exists y \mathtt{bew}_{\mathtt{T}}(y, \ulcorner\gamma\urcorner).$$

Da T konsistent ist, gilt $\nvdash_T \gamma$ und somit für alle $n \in \mathbb{N}$: $\vdash_T \neg\mathtt{bew}_{\mathtt{T}}(\underline{n}, \ulcorner\gamma\urcorner)$. Zusammen mit (3) widerspricht dies jedoch der ω-Konsistenz von T. Also gilt $\nvdash_T \neg\gamma$ womit insgesamt folgt, dass γ von T unabhängig ist.

Die Konstruktivität folgt aus jener des Beweises des Fixpunktlemmas. □

Abschließend formulieren und beweisen wir noch eine populäre Version des ersten Unvollständigkeitssatzes. Im Unterschied zu Satz 2 ist der Beweis jedoch nicht konstruktiv; er beruht auf dem Nichtrepräsentierbarkeitslemma 6.

Satz 5 (Gödels Erster Unvollständigkeitssatz, Version). Jede konsistente, rekursiv axiomatisierbare, arithmetische Theorie $T \supseteq \mathsf{PA}$ ist unvollständig.

Lemma 6 (Nichtrepräsentierbarkeitslemma). Es sei T eine gödelisierbare Theorie. Dann ist $\dot T$ nicht in T repräsentierbar.

Beweis. (Lemma 6). Angenommen, $\dot T$ wird durch $\tau = \tau(x) \in \mathcal{L}_{ar}$ repräsentiert. Dann gilt insbesondere für jede Aussage $\alpha \in \mathcal{L}^0$:

(R) $$\nvdash_T \alpha \;\Leftrightarrow \vdash_T \neg\tau(\ulcorner\alpha\urcorner).$$

Ist nun aber $\gamma \in \mathcal{L}^0$ ein Fixpunkt von $\neg\tau(x)$ gemäß des Fixpunktlemmas 4, so gilt

(F) $$\vdash_T \gamma \;\Leftrightarrow \vdash_T \neg\tau(\ulcorner\gamma\urcorner)$$

und die Wahl $\alpha = \gamma$ in (R) ergibt mit (F) den Widerspruch $\nvdash_T \gamma \;\Leftrightarrow \vdash_T \gamma$. □

Beweis. (Satz 5). Wäre T vollständig, so gemäß [3] auch rekursiv. Dann wäre aber $\dot T$ im Widerspruch zum Nichtrepräsentierbarkeitslemma in T repräsentierbar. □

Literatur

1. K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik **37** (1931), 173–198.
2. W. Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*, Studium, Vieweg+Teubner, 2008.
3. Studenten, *Vorträge*, `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/fs2012/logik`, Zugriff: 23.05.2012.