Aussagenlogischer Kalkül, Vollständigkeitssatz

Salome Vogelsang

22. Februar 2012

Eine Motivation für den Regelkalkül des Gentzen-Typus ist formuliert von Gentzen selbst:

"Mein erster Gesichtspunkt war folgender: Die Formalsisierung des logischen Schliessens, wie sie insbesondere durch Frege, Russel und Hilbert entwickelt worden ist, entfernt sich ziemlich weit von der Art des Schliessens, wie sie in Wirklichkeit bei mathematischen Beweisen geübt wird. [...] Ich wollte nun zunächst einmal einen Formalismus aufstellen, der dem wirklichen Schliessen möglichst nahe kommt. So ergab sich ein 'Kalkül des natürlichen Schliessens.'"[Gen, Seite 1].

Der Vortrag und das folgende dazugehörige Handout behandeln das Kapitel 1.4 in [Rau, Seite 18 ff]. Die Notation entspricht jener in [Rau].

Mittels eines Regelkalküls führen wir eine Ableitungsrelation $\vdash$ in der Menge $\mathfrak{P}\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ ein, welche sich als identisch mit der Forlgerungsrelation $\models$ erweisen wird. Wir übernehmen für die Ableitungsrelation $\vdash$ dieselben Konventionen wie für die Folgerungsrelation $\models$ im Kapitel 1.3 in [Rau, Seite 14 f]. Also meine $X \vdash \alpha, \beta$ grundsätzlich $X \vdash \alpha$ und $X \vdash \beta$. Ferner schreiben wir meistens $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ anstelle von $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$, und ebenso $X, \alpha \vdash \beta$ anstelle von $X \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Die Regeln beziehen sich auf Paare $(X, \alpha) \subseteq \mathfrak{P}\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ von Formelmengen X und Formeln α, wobei X nicht endlich sein muss. Diese Paare (X, α) nennen wir im folgenenden *Sequenzen*. Obwohl $\vdash$ eigentlich eine Relation bezeichnet, wird die Sequenz (X, α) häufig mit $X \vdash \alpha$ bezeichnet. Jede Regel hat gewisse Prämissen und eine darunterstehende Konklusion. Nur (AR) hat keine Prämissen und erlaubt die Herleitung aller Sequenzen $\alpha \vdash \alpha$, auch *Anfangssequenzen* genannt.

Definition 1 Den *Kalkül* formulieren wir in der Signatur $\{\wedge, \neg\}$, er hat folgende sechs Regeln, welche *Basisregeln* genannt werden.

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha} \qquad \text{(AR) Anfangsregel}$$

$$\frac{X \vdash \alpha}{X' \vdash \alpha}\; X' \supseteq X \qquad \text{(MR) Monotonieregel}$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \beta}{X \vdash \alpha \wedge \beta} \qquad (\wedge 1)$$

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \;\vdash\; \alpha, \beta} \qquad (\wedge 2)$$

$$\frac{X \vdash \alpha, \neg\alpha}{X \vdash \beta} \qquad (\neg 1)$$

$$\frac{X, \alpha \vdash \beta \mid X, \neg\alpha \;\vdash\; \beta}{X \vdash \beta} \qquad (\neg 2)$$

Es soll $X \vdash \alpha$ gelten, falls die Sequenz durch schrittweises Anwenden der Basisregeln gewonnen werden kann. Andernfalls $X \nvdash \alpha$. Dies können wir streng formal formulieren.

Definition 2 Eine *Herleitung* ist eine endliche Folge $(S_0; \ldots; S_n)$ von Sequenzen S_i derart, dass jedes Glied dieser Folge eine Anfangssequenz ist oder aus vorangehenden Folgengliedern durch direkte Anwendung einer Basisregel gewonnen werden kann. *Aus X ist α ableitbar* oder *beweisbar*, in Zeichen $X \vdash \alpha$, wenn (X, α) die Endsequenz S_n einer derartigen Herleitung ist.

Beispiel 3 Herleitung von $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$:

1	$\alpha, \beta \vdash \alpha$	(AR), (MR)
2	$\alpha, \beta \vdash \beta$	(AR), (MR)
3	$\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$	$(\wedge 1)$

Für uns interessanter ist das Ableiten von Regeln. Im folgenden werden einige Beispiele gegeben.

Beispiel 4 ($\neg$-Elimination) $\dfrac{X, \neg\alpha \vdash \alpha}{X \vdash \alpha}$

1	X, $\alpha \vdash \alpha$	(AR), (MR)
2	X, $\neg\alpha \vdash \alpha$	Annahme
3	X $\vdash \alpha$	$(\neg 2)$

Beispiel 5 (reductio ad absurdum) $\dfrac{X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta}{X \vdash \alpha}$

1	$X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta$	Annahme
2	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	$(\neg 1)$
3	$X \vdash \alpha$	$\neg$-Elimination

Beispiel 6 ($\rightarrow$-Elimination) $\dfrac{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X, \alpha \vdash \beta}$

1	$X, \alpha, \neg\beta \vdash \alpha, \neg\beta$	(AR), (MR)
2	$X, \alpha, \neg\beta \vdash \alpha \wedge \neg\beta$	($\wedge$1)
3	$X \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	Annahme
4	$X, \alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$	(MR)
5	$X, \alpha, \neg\beta \vdash \beta$	($\neg$1) auf 2 und 4
6	$X, \alpha \vdash \beta$	$\neg$-Elimination

Beispiel 7 (Schnittregel) $\dfrac{X \vdash \alpha | X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \beta}$

1	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	Annahme, (MR)
2	$X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	(AR), (MR)
3	$X, \neg\alpha \vdash \beta$	($\neg$1)
4	$X, \alpha \vdash \beta$	Annahme
5	$X \vdash \beta$	($\neg$2) auf 4 und 3

Beispiel 8 (Abtrennungsregel) $\dfrac{X \vdash \alpha, \alpha \to \beta}{X \vdash \beta}$

1	$X \vdash \alpha \to \beta$	Annahme
2	$X, \alpha \vdash \beta$	$\to$-Elimination
3	$X \vdash \alpha$	Annahme
4	$X \vdash \beta$	Schnittregel auf 3 und 2

Beispiel 9 (Modus Ponens) Verwendet man die Abtrennungsregel mit $X = \{\alpha, \alpha \to \beta\}$ so erhält man $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$, was auch unter dem Namen *Modus Ponens* bekannt ist.

Beispiel 10 ($\to$-Einführung) $\dfrac{X, \alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \to \beta}$

1	$X, \alpha \wedge \neg\beta, \alpha \vdash \beta$	Annahme, (MR)
2	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \alpha$	(AR), (MR), ($\wedge$2)
3	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \beta$	Schnittregel
4	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \neg\beta$	(AR), (MR), ($\wedge$2)
5	$X, \alpha \wedge \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$	($\neg$1)
6	$X, \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \alpha \to \beta$	(AR), (MR)
7	$X \vdash \alpha \to \beta$	($\neg$2) auf 5 und 6

Bemerkung 11 Die $\to$-Einführung ist die syntaktische Form des semantisch formulierten Deduktionstheorems.

Wir betrachten hier Regeln in folgender Gestalt

$$\frac{X_1 \vdash \alpha_1 | \dots | X_n \vdash \alpha_n}{X \vdash \alpha} \qquad \text{(R)},$$

welche als *Gentzen-Stil-Regeln* bezeichnet werden.

Definition 12 Eine *Eigenschaft* $\mathcal{E}$ von Sequenzen (X, α) ist die Menge von Paaren (X, α), auf welche $\mathcal{E}$ zutrifft.

Ein Beispiel einer Eigenschaft ist die Ableitungsrelation $\vdash$ selbst. Ein weiteres Beispiel ist $\models$ die Eigenschaft, die auf ein Paar (X, α) zutrifft, genau dann wenn $X \models \alpha$.

Definition 13 Wir sagen, $\mathcal{E}$ ist *abschlossen unter R*, wenn

$$\mathcal{E}(X_1, \alpha_1), \ldots, \mathcal{E}(X_n, \alpha_n) \Rightarrow \mathcal{E}(X, \alpha).$$

Satz 14 (Beweisprinzip durch Regelinduktion) *Ist eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ ($\subseteq \mathfrak{P}\mathcal{F} \times \mathcal{F}$) abgeschlossen unter allen Basisregeln von $\vdash$, so gilt $\mathcal{E}(X, \alpha)$ immer wenn $X \vdash \alpha$.*

Beweis. Die Sequenz $X \vdash \alpha$ ist die kleinste aller Eigenschaften $\mathcal{E}$, die unter allen Basisregeln abschlossen ist. Das heisst, $X \vdash \alpha$ impliziert $\mathcal{E}(X, \alpha)$. □

Lemma 15 (Korrektheit des Kalküls)

$$(Kor)\ X \vdash \alpha \Rightarrow X \models \alpha, \textit{ für alle } X, \alpha,$$

kurz $\vdash \subseteq \models$ geschrieben.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\models$ abgeschlossen ist unter den Basisregeln. Dann folgt mit Satz 14 die Aussage.

(AR) Es ist klar, dass gilt $\alpha \models \alpha$, da (AR) eine Regel ohne Prämisse ist.

(MR) Sei $X \models \alpha$. Dann ist $X' \models \alpha$ für $X' \supseteq X$ nach der Monotonieregel für das Schliessen.

($\wedge$1) Sei $X \models \alpha, \beta$. Dann ist $\models \alpha \wedge \beta$, gemäss der Wertematrix für $\wedge$.

($\wedge$2) Sei $X \models \alpha \wedge \beta$. Dann ist $X \models \alpha, \beta$, auch gemäss der Wertematrix für $\wedge$.

($\neg$1) Sei $X \models \alpha, \neg\alpha$. Mit ($\wedge$1) folgt $X \models \alpha \wedge \neg\alpha$ $(=\perp)$. Also gilt $X \models \beta$ für ein beliebiges β (X ist unerfüllbar, hat also kein Modell).

($\neg$2) Sei $X, \alpha \models \beta$ und $X, \neg\alpha \models \beta$. Sei nun $w \models X$. Falls $w \models \alpha$, dann folgt $w \models \beta$ aus $X, \alpha \models \beta$. Andernfalls ist $w \models \neg\alpha$, dann folgt $w \models \beta$ aus $X, \neg\alpha \models \beta$.

□

Satz 16 (Endlichkeitssatz für $\vdash$) *Ist $X \vdash \alpha$, so ist bereits $X_0 \vdash \alpha$ für eine endliche Teilmenge $X_0 \subseteq X$.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}(X, \alpha)$ die Eigenschaft '$X_0 \vdash \alpha$ für ein gewisses endliches $X_0 \subseteq X$'. Wir müssen nun zeigen, dass $\mathcal{E}$ abgeschlossen ist unter allen Basisregeln. Dann können wir Regelinduktion anwenden und erhalten die Behauptung.

(AR) Die Eigenschaft $\mathcal{E}(X, \alpha)$ gilt für $X = \{\alpha\}$, mit $X_0 = X$.

(MR) Hat X eine endliche Teilmenge X_0 mit $X_0 \vdash \alpha$, so auch jede Obermenge $X' \supseteq X$.

($\wedge$1) Seien $\mathcal{E}(X, \alpha), \mathcal{E}(X, \beta)$ für $X_1 \vdash \alpha$ und $X_2 \vdash \beta$, wobei $X_1, X_2 \subseteq X$ endliche Teilmengen sind. Dann gilt $X_0 \vdash \alpha, \beta$ für $X_0 = X_1 \cup X_2$. Mit ($\wedge$1) gilt nun $X_0 \vdash \alpha \wedge \beta$, also $\mathcal{E}(X, \alpha \wedge \beta)$.

($\wedge$2) Sei $\mathcal{E}(X, \alpha \wedge \beta)$. Das heisst es gibt ein endliches $X_0 \subseteq X$, so dass $X_0 \vdash \alpha \wedge \beta$. Nun wendet man ($\wedge$2) an und erhält $X_0 \vdash \alpha, \beta$, also $\mathcal{E}(X, \alpha)$ und $\mathcal{E}(X, \beta)$.

($\neg 1$) Seien $\mathcal{E}(X,\alpha), \mathcal{E}(X,\neg\alpha)$. Also gibt es endliche $X_1, X_2 \subseteq X$ so dass $X_1 \vdash \alpha$ und $X_2 \vdash \neg\alpha$. Damit gilt $X_0 \vdash \alpha, \neg\alpha$, für $X_0 = X_1 \cup X_2$. Man wendet ($\neg 1$) an und erhält $\mathcal{E}(X,\beta)$.

($\neg 2$) Seien $\mathcal{E}(X \cup \{\alpha\}, \beta), \mathcal{E}(X \cup \{\neg\alpha\}, \beta)$. Dann gibt es endliche $X_1, X_2 \subseteq X$, so dass gilt $X_1, \alpha \vdash \beta,\ X_2 \neg\alpha \vdash \beta$. Dann gilt $X_0, \alpha \vdash \beta$ und $X_0, \neg\alpha \vdash \beta$ für $X_0 = X_1 \cup X_2$. Wendet man($\neg 2$) an, ergibt sich $X_0 \vdash \beta$ und somit $\mathcal{E}(X,\beta)$.

Also ist $\mathcal{E}$ abgeschlossen unter allen Basisregeln. □

Definition 17 $X \subseteq \mathcal{F}$ heisse *inkonsistent* (bezüglich unseres Kalküls), wenn $X \vdash \alpha$ für alle Formeln α, und andernfalls *konsistent*. X heisst *maximal konsistent*, wenn X konsistent ist und jede echte Obermenge $X' \supset X$ inkonsistent ist.

Bemerkung 18 Die Inkonsistenz von X lässt sich durch die Ableitbarkeit einer einzigen Formel kennzeichnen:

$$X \text{ ist inkonsistent } \Leftrightarrow X \vdash \perp$$

Denn, wenn X inkonsistent ist, gilt $X \vdash \alpha$ für alle Formeln α, insbesondere $X \vdash \perp$. Umgekehrt: Gilt $X \vdash \perp$ ($= p \wedge \neg p$), dann gilt mit ($\wedge 2$) auch $X \vdash p, \neg p$. Zusammen mit ($\neg 1$) folgt nun $X \vdash \alpha$ für alle möglichen Formel α, also ist X inkonsistent.

Lemma 19 *Die Ableitungsrelation* $\vdash$ *hat die Eigenschaften*

$$(C^+)\ X \vdash \alpha \Leftrightarrow X, \neg\alpha \vdash \perp\ .$$
$$(C^-)\ X \vdash \neg\alpha \Leftrightarrow X, \alpha \vdash \perp\ .$$

Beweis. Der Beweis wird hier nur für (C^+) geführt. Für (C^-) ist der Beweis analog.

($\Rightarrow$)

1	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	Annahme, (MR)
2	$X, \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	(AR), (MR)
3	$X, \neg\alpha \vdash \perp$	($\neg 1$)

($\Leftarrow$)

1	$X, \neg\alpha \vdash \alpha$	Inkonsistenz, Bemerkung 18
2	$X, \alpha \vdash \alpha$	(AR), (MR)
3	$X \vdash \alpha$	($\neg 2$)

□

Lemma 20 (Satz von Lindenbaum) *Jede konsistente Menge X kann erweitert werden zu einer maximal konsistenten Menge $X' \supseteq X$.*

Beweis. Sei H die Menge aller konsistenten Mengen $Y \supseteq X$. Diese ist nichtleer, da $X \in H$ und H ist halbgeordnet bezüglich der Inklusion. Sei K eine Kette in H, i.e. $Y \subseteq Z$ oder $Z \subseteq Y$ für alle $Y, Z \subseteq K$. Sei nun $U = \bigcup K$. Dies ist eine obere Schranke für K, da falls $Y \in K$ sicher gilt $Y \subseteq U$. Weiter ist U konsistent, was man wie folgt sieht: Man nehme an, dass $U \vdash \perp$, also dass U inkonsistent ist. Mit Satz 16 gilt, $U_0 \vdash \perp$ für ein endliches $U_0 = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\} \subseteq U$. Sei nun $\alpha_i \in Y_i$ für gewisse $Y_i \in K$ und sei Y die grösste Menge von $Y_0, \dots, Y_n$. Dann gilt $\alpha_i \in Y$ für alle $i \leq n$, also gilt $Y \vdash \perp$, was aber $Y \in K$ widerspricht.

Nach dem Zornschen Lemma hat H ein maximales Element X', was eine maximal konsistente Erweiterung von X ist. □

Bemerkung 21 Der Beweis oben trifft keine Annahmen über die Mächtigkeit der Sprache. Die ursprüngliche Konstruktion von Lindenbaum hingegen bezog sich auf die Menge der abzählbaren Sprachen $\mathcal{F}$. Seine Konstruktion war in diesem Fall wie folgt: Sei $X_0 := X \subseteq \mathcal{F}$ konsistent und $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ eine Aufzählung von $\mathcal{F}$. Definiere $X_{n+1} := X_n \cup \{\alpha_n\}$, wenn diese Menge konsistent ist und sonst als $X_{n+1} := X_n$. Man sieht dann, dass $Y = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ eine maximal konsistente Erweiterung von X ist.

Lemma 22 *Eine maximal konsistente Menge X hat die Eigenschaft*

$$X \vdash \neg\alpha \Leftrightarrow X \nvdash \alpha, \text{ wobei } \alpha \text{ eine beliebige Formel ist.}$$

Beweis. Wenn $X \vdash \neg\alpha$ für eine beliebige Formel α gilt, dann wiederspräche $X \vdash \alpha$ der Konsistenz von X. Gilt umgekehrt $X \nvdash \alpha$, dann gilt mit Lemma 18, dass $X \cup \{\neg\alpha\}$ eine konsistente Erweiterung von X ist. Da X maximal ist, gilt $\neg\alpha \in X$, also $X \vdash \neg\alpha$. □

Lemma 23 *Eine maximal konsistente Menge X ist erfüllbar.*

Beweis. Definiere w durch $w \models p \Leftrightarrow X \vdash p$. Es ist zu zeigen, dass für alle Formeln α Folgendes gilt:

$$X \vdash \alpha \Leftrightarrow w \models \alpha.$$

Wir zeigen dies durch Induktion über den Formelaufbau. Für Primformeln p gilt dies gemäss Definition von w. Zudem gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}
X \vdash \alpha \wedge \beta &\Leftrightarrow X \vdash \alpha, \beta && (\wedge 1), (\wedge 2)\\
&\Leftrightarrow w \models \alpha, \beta && \text{Induktionsannahme}\\
&\Leftrightarrow w \models \alpha \wedge \beta && \text{Definition}\\
X \vdash \neg\alpha &\Leftrightarrow X \nvdash \alpha && \text{Lemma 24}\\
&\Leftrightarrow w \nvDash \alpha && \text{Induktionsannahme}\\
&\Leftrightarrow w \models \neg\alpha && \text{Definition}
\end{aligned}$$

Damit folgt $w \models X$, also die Behauptung. □

Satz 24 (Vollständigkeitssatz) *Für alle Sequenzen (X, α) gilt* $X \vdash \alpha \Leftrightarrow X \models \alpha$.

Beweis. Die Korrektheit des Kalküls ist die Aussage von Lemma 15. Sei umgekehrt $X \nvdash \alpha$. Dann ist $X \cup \neg\alpha$ konsistent. Nach Lemma 20 kann $X \cup \{\neg\alpha\}$ zu einer maximal konsistenten Menge Y erweitert werden. Nach Lemma 23 ist Y erfüllbar, daher ist auch $X, \neg\alpha$ erfüllbar. Daraus folgt $X \nvDash \alpha$. □

Der Endlichkeitssatz für das syntaktische Folgern, also Satz 16, liefert den folgenden Satz.

Satz 25 (Endlichkeitssatz für das Folgern) *Ist* $X \models \alpha$, *so ist* $X_0 \models \alpha$ *für eine gewisse endliche Teilmenge* X_0 *von X.*

Satz 26 (Kompaktheitssatz) *X ist erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von X erfüllbar ist.*

Beweis. Aus Satz 25 folgt die Kontraposition wie folgt: Sei X unerfüllbar, also $X \models \bot$. Mit Satz 25 gilt $X_0 \models \bot$ für ein endliches $X_0 \subseteq X$, woraus die Aussage folgt. $\square$

Bemerkung 27 Der Kompaktheitssatz hat seinen Namen daher, dass er sich umformulieren lässt zu:

$$\bigcap_{\alpha \in X} \mathrm{Md}(\alpha) = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in X_0} \mathrm{Md}(\alpha) = \emptyset \text{ für ein endliches } X_0 \subseteq X,$$

wobei $\mathrm{Md}(\alpha)$ die Menge aller Modelle von α bezeichnet. Die Menge aller Modelle $\mathrm{Md}(\alpha)$ kann als abgeschlossene Teilmenge des topologische Raum $\prod_{n \geq 1}\{0,1\}$ aufgefasst werden.

Den topologischen Raum $\prod_{n \geq 1}\{0,1\}$ versehen wir mit der Produkttopologie, wobei $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie versehen ist. Dieser Raum ist kompakt, was aus der Kompaktheit von $\{0,1\}$ und dem Satz von Tychonoff folgt. Die offenen Basismengen sind gegeben durch $\{(x_i)_{i \geq 1} | x_{i_1} = \epsilon_{i_1}, \ldots, x_{i_n} = \epsilon_{i_n}\}$ für $\epsilon_{i_k} \in \{0,1\}$. Die Basismengen sind auch abgeschlossen, da das Komplement offen ist, als eine Vereinigung von offenen Basismengen.

Für eine beliebige Formel α ist $\mathrm{Md}(\alpha)$ eine endliche Vereinigung von offenen, abgeschlossenen Basismengen. Die Endlichkeit kommt daher, dass die Frage, ob eine Belegung ein Modell von α ist, nur von endlich vielen in α vorkommenden Variablen abhängt. Damit ist auch $\mathrm{Md}(\alpha)$ abgechlossen. Mit der Kompaktheit des Produktraumes folgt nun die Aussage. Siehe auch [Fri, Seite 7 ff].

Literatur

[Fri] Frisch, Sophie: http://www.math.tugraz.at/ frisch/lehr/logik08/skriptum/logik210709.pdf, Zugriff 20.02.2012.

[Gen] Gentzen, Gerhard: *Untersuchungen über das logische Schliessen.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1974.

[Rau] Rautenberg, Wolgang: *Einführung in die Mathematische Logik.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1996.