Die Ableitungsbedingungen

Regula Krapf

23. Mai 2012

Dieses Skript basiert mehrheitlich auf dem Kapitel 7.1 aus *Einführung in die Mathematische Logik* von Wolfgang Rautenberg [RW].

1 Einleitung

Das Ziel dieses Vortrages besteht darin, den Grundbaustein für den Beweis des 2. Unvollständigkeitssatzes zu legen, welcher im nächsten Vortrag behandelt wird. Dieser besagt, dass für eine hinreichend strenge konsistente axiomatisierbare Theorie $T \subseteq \mathcal{L}$ nicht die Konsistenz von T nicht innerhalb der Theorie beweisbar ist. Wir werden nun die sogenannten Ableitungsbedingungen für die Theorie **PA** nachweisen, welche über die Beweisbarkeit von beweisbaren Formeln innerhalb von **PA** Aufschluss geben und aus denen dann im nächsten Vortrag der 2. Unvollständigkeitssatz gefolgert wird.

Konvention 1.1.

1. Sei $T \subseteq \mathcal{L}$ eine gödelisierbare Theorie; das heisst, dass $\mathcal{L}$ gödelisierbar ist und es eine Folge von Grundtermen $\underline{0}, \underline{1}, \ldots$ gibt.
2. Der Einfachheit halber schreiben wir jeweils $\alpha \vdash \beta \vdash \gamma$ für $\alpha \vdash \beta$ und $\beta \vdash \gamma$; und analog $\alpha \vdash \beta \equiv \gamma$ für $\alpha \vdash \beta$ und $\beta \equiv \gamma$.
3. Wir führen die Abkürzung $\exists!$ wie folgt ein: für $\alpha = \alpha(x) \in \mathcal{L}$ sei $\exists! x\alpha := \exists x\alpha \wedge \forall xy(\alpha \wedge \alpha\frac{y}{x} \to x = y)$, mit $y \notin var\ \alpha$. Insbesondere können wir nach ($\wedge$1) "wie gewohnt" einen Beweis von $\exists! x\alpha$ in einen Existenz- und einen Eindeutigkeitsbeweis aufteilen.

2 Die Ableitungsbedingungen

Definition 2.1. Sei bew_T das in [AA] definierte p.r. Prädikat. Gemäss dem Repräsentationssatz (Satz 1 aus [WD]) gibt es dann eine Formel $\mathbf{bew}_T$, welche $bew_T(y, x)$ in T repräsentiert.Wir definieren folgende Abkürzungen:

1. $\square(x) := \mathbf{bwb}_T(x) := \exists y \mathbf{bew}_T(y, x)$
2. $\square\alpha := \mathbf{bwb}_T \frac{\ulcorner\alpha\urcorner}{x}$, gesprochen 'box α'.

3. $\mathbf{Con}_T := \neg\Box\bot$, wobei $\bot := 0 \neq 0$ eine Kontradiktion ist.

Somit ist $\vdash_T \Box\alpha$ ist die Formalisierung der Beweisbarkeit von α innerhalb von T. Die Verträglichkeit einer Formel $\alpha \in \mathcal{L}^0$ mit T lässt sich durch $\vdash_T \neg\Box\neg\alpha$ formalisieren.

Definition 2.2. Wir definieren die **Ableitungsbedingungen** für T wie folgt:
Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^0$:

(D1): $\vdash_T \alpha \Rightarrow \vdash_T \Box\alpha$,

(D2): $\vdash_T \Box\alpha \wedge \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\beta$,

(D3): $\vdash_T \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$.

Gemäss dem Deduktionstheorem können wir $(D2)$ und $(D3)$ äquivalent schreiben als $(D2') :\ \Box(\alpha \to \beta) \vdash_T \Box\alpha \to \Box\beta$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^0$ bzw. $(D3') :\ \Box\alpha \vdash_T \Box\Box\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{L}^0$.

Die Bedingung $(D1)$ besagt, dass wenn für α ein formaler Beweis in der Theorie T existiert, dann kann man innerhalb von T zeigen, dass α beweisbar ist. Des Weiteren beschreibt $(D2)$ den Abschluss von $\vdash_T \Box\alpha$ unter dem Modus Ponens und $(D3)$ stellt die Formalisierung von $(D1)$ innerhalb von T dar.

Bemerkung 2.3. Aus $(D1)$ und $(D2)$ folgt $(D0) :\ \alpha \vdash_T \beta \Rightarrow \Box\alpha \vdash_T \Box\beta$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^0$.
Daraus folgt insbesondere, dass $\mathbf{Con}_T$ unabhängig von der Wahl der Kontradiktion $\bot$ ist.

Beweis. Nach dem Deduktionstheorem ist $\alpha \vdash_T \beta$ gleichbedeutend mit $\vdash_T \alpha \to \beta$. Mit $(D1)$ folgt dann $\vdash_T \Box(\alpha \to \beta)$ und $(D2')$ impliziert $\vdash_T \Box\alpha \to \Box\beta$ und somit $\Box\alpha \vdash_T \Box\beta$. $\Box$

Im Folgenden werden wir nun zeigen, dass die Ableitungsbedingungen in **PA** gelten.

Lemma 2.4. *Die Theorie* **PA** *erfüllt* $(D1)$.

Beweis. Gemäss Korollar 7 in [WD] haben wir: Für alle $\alpha \in \mathcal{L}_{ar} : \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha \Rightarrow \vdash_{\mathsf{PA}} \mathbf{bwb}_{\mathbf{PA}} \frac{\ulcorner\alpha\urcorner}{x} = \Box\alpha$. $\Box$

Bemerkung 2.5. Die Umkehrung von $(D1)$, also $(D1^*) :\ \vdash_T \Box\alpha \Rightarrow \vdash_T \alpha$, gilt im Allgemeinen nicht; sie ist aber für $T = \mathbf{PA}$ erfüllt: Angenommen es gibt ein $\alpha \in \mathcal{L}^0_{ar}$, so dass $\vdash_T\alpha$ nicht erfüllt ist, so gilt nach Korollar 7 in [WD] $\vdash_{\mathsf{PA}} \neg\mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(\underline{n}, \ulcorner\alpha\urcorner)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\mathcal{N} \models \forall y \neg\mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(y, \ulcorner\alpha\urcorner)$. Falls $\vdash_{\mathsf{PA}} \Box\alpha = \exists y \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(y, \ulcorner\alpha\urcorner)$, und somit $\mathcal{N} \models \exists y \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(y, \ulcorner\alpha\urcorner)$, was ein Widerspruch ist.

Definition 2.6. Eine Funktion $f \in \mathbf{F}_n$ heisst in T *definierbar*, wenn es ein $\delta_f = \delta_f(\vec{x}, y) \in \mathcal{L}$ gibt mit

(a) $\vdash_T \delta_f(\underline{\vec{a}}, \underline{f\vec{a}})$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{N}^n$,

(b) $\vdash_T \forall\vec{x}\exists!y\delta_f(\vec{x}, y)$.

Dann wird f durch $\delta_f(\vec{x}, y)$ in T repräsentiert und $y = f\vec{x} \leftrightarrow \delta_f(\vec{x}, y)$ ist eine legitime explizite Definition eines ebenfalls mit f bezeichneten Symbols in T. Insbesondere gilt dann $\vdash_T \underline{f\vec{a}} = f\underline{\vec{a}}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{N}^n$.

Für den Nachweis von $(D2)$ und $(D3)$ möchten wir diese Definiton noch etwas verschärfen. Dazu benötigen wir aber zuerst folgende

Definition 2.7. 1. Wir definieren *spezielle Σ_1-Formeln* wie folgt:

(i) Für x, y, z paarweise verschiedene Variablen sind $\mathbf{S}x = y$, $x + y = z$ und $x \cdot y = z$ spezielle Σ_1-Formeln.

(ii) Sind α, β spezielle Σ_1-Formeln, so auch $\alpha\wedge\beta, \alpha\vee\beta, \alpha\frac{0}{x}, \alpha\frac{y}{x}$ (falls $y \notin gbd\alpha$), $\exists x\alpha$ und $(\forall x < y)\alpha$ (für $y \notin var\,\alpha$) .

2. Eine Formel $\alpha \in \mathcal{L}_{ar}$ heisst $\Sigma_1 - Formel$, falls sie in **PA** zu einer speziellen Σ_1-Formel äquivalent ist (d.h. $\alpha \equiv_{\mathsf{PA}} \beta$, wobei β spezielle Σ_1-Formel).

Definition 2.8. Eine rekursive Funktion $f \in \mathbf{F}_n$ heisst Σ_1*-definierbar in* **PA** oder *beweisbar rekursiv*, falls es eine Σ_1-Formel $\delta_f(\vec{x}, y)$ gibt, welche (a) und (b) aus Definition 2.6 erfüllt.
Insbesondere ist (a) äquivalent ist zu

$$\text{(a'): } \mathcal{N} \models \delta_f(\underline{\vec{a}}, \underline{f\vec{a}}) \text{ für alle } \vec{a} \in \mathbb{N}^n,$$

was direkt aus Satz 6.3.1 in [RW] (Σ_1-Vollständigkeit von **PA**) folgt. Dieser besagt, dass jede in $\mathcal{N}$ wahre Σ_1-Aussage bereits in **PA** beweisbar ist.

Beispiel 2.9. Die 2-stellige p.r. Funktion $+(a, b) := a + b$ ist beweisbar rekursiv mit repräsentierender Formel $\delta_+(x, y, z) = z = x + y$: Nach Definition ist δ_+ eine spezielle Σ_1-Formel, und erfüllt wegen $\vdash_{\mathsf{PA}} \underline{a + b} = \underline{a} + \underline{b}$ (siehe (C1) in [SM]) klarerweise (a). Die Existenz in (b) ist trivial, und die Eindeutigkeit ergibt sich aus $\delta_+(x, y, z), \delta_+(x, y, z')$ $\vdash_{\mathsf{PA}} z = x + y, z' = x + y \vdash_{\mathsf{PA}} z = z'$.

Im Folgenden seien $n, \nu, i, \ldots$ Variablen von $\mathcal{L}_{ar}$. Wir bezeichnen mit c, d in **PA** definitorisch eingführte einstellige Funktionen, welche noch von weiteren Parametern abhängen dürfen. Wir verwenden die Abkürzung $c_v := c(\nu)$ für alle ν.
Wegen dem Repräsentationssatz können wir die Funktionen rest, $\boldsymbol{\beta}$ sowie die Prädikate $|, \perp$ in **PA** repräsentieren; wir verwenden jeweils wieder dasselbe Symbol. Wir schreiben ab jetzt kurz $\boldsymbol{\beta}uv$ für $\boldsymbol{\beta}(u, v)$. Wir können nun den Beweis des Chinesischen Restsatzes sowie die Eigenschaft der $\boldsymbol{\beta}$-Funktion (siehe Propositionen 3 und 5 in [WD]) auch innerhalb von **PA** formulieren und beweisen:

Lemma 2.10. *Seien c, d beweisbar rekursiv. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall n[(\forall \nu, i, j \leq n)(c_\nu < d_\nu \wedge (i \neq j \to d_i \perp d_j)) \to \exists a(\forall \nu \leq n)\mathrm{rest}(a, d_\nu) = c_\nu]$.

2. $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall x \exists u(\forall \nu \leq x)c_\nu = \boldsymbol{\beta} uv$.

Beweis. Im Wesentlichen kann man den zahlentheoretischen Beweis beider Aussagen auf **PA** übertragen; Für einen detaillierten Beweis siehe [GJ], Seiten 11-12 (für 1.) sowie 13-14 (für 2.). Dabei wird im Wesentlichen der zahlentheoretische Beweis beider Aussagen aus [WD] auf **PA** übertragen. Siehe dazu auch Beispiel 3.1. □

Satz 2.11. *Jede p.r. Funktion f ist beweisbar rekursiv. Im Fall* $f = \mathbf{Op}(g, h)$ *sind die Rekursionsgleichungen für f beweisbar rekursiv.*

Beweis. Wir machen Induktion über den rekursiven Aufbau der p.r. Funktionen. Sei dazu f eine beliebige p.r. Funktion. Dann trifft einer der folgenden drei Fälle auf f zu:

- Sei f eine Anfangsfunktion: Falls f die Konstante 0 bzw. die Nachfolgerfunktion $\mathbf{S}$ bzw. die Projektionsfunktion $\mathbf{I}^n_\nu$ ist , so sind $\mathfrak{v}_0 = 0$, $\mathfrak{v}_1 = \mathbf{S}\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}_\nu$ die definierenden Formeln (vergleiche dazu mit Beispiel 2.9).

- Sei $f = h[g_1, \ldots, g_m]$, wobei $g_1, \ldots, g_m, h$ beweisbar rekursiv sind mit definierenden Formeln $\delta_{g_i}(\vec{x}, y)$ bzw. $\delta_h(\vec{y}, y)$ für g_i bzw. h. Wir definieren nun $\delta_f(\vec{x}, y) := \exists \vec{y}(\bigwedge_{i=1}^m \delta_{g_i}(\vec{x}, y_i) \wedge \delta_h(\vec{y}, y))$. Da δ_{g_i}, δ_h Σ_1-Formeln sind, ist dies auch δ_f. Für jedes $\vec{a} \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{N} \models \delta_{g_i}(\underline{\vec{a}}, \underline{b_i})$ und $\mathcal{N} \models \delta_h(\underline{\vec{b}}, \underline{h\vec{b}})$ wobei $b_i := g_i\vec{a}$. Somit gilt auch $\mathcal{N} \models \bigwedge_{i=1}^m \delta_{g_i}(\underline{\vec{a}}, \underline{b_i}) \wedge \delta_h(\underline{\vec{b}}, \underline{h\vec{b}}) = \bigwedge_{i=1}^m \delta_{g_i}(\underline{\vec{a}}, \underline{b_i}) \wedge \delta_h(\underline{\vec{b}}, \underline{f\vec{a}})$, da nach Voraussetzung $f\vec{a} = h\vec{b}$ gilt. Mit Partikularisierung ergibt sich dann (a'). Da (b) für g_i gilt, erhalten wir: $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall \vec{x} \exists y_i \delta_{g_i}(\vec{x}, y_i)$ für alle i. Daraus folgt $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall \vec{x} \exists \vec{y} \bigwedge_{i=1}^m \delta_{g_i}(\vec{x}, y_i)$. Nun können wir (b) für h anwenden, und erhalten $\vdash_{\mathsf{PA}} \exists y \delta_h(\vec{y}, y)$ und mit Generalisierung $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall \vec{x} \exists y \delta_h(\vec{y}, y)$. Es folgt dann $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall \vec{x}((\exists \vec{y} \bigwedge_{i=1}^m \delta_{g_i}(\vec{x}, y_i)) \wedge (\exists y \delta_h(\vec{y}, y))$, woraus wir
$$\vdash_{\mathsf{PA}} \forall \vec{x} \exists y \exists \vec{y}(\bigwedge_{i=1}^m \delta_{g_i}(\vec{x}, y_i) \wedge \delta_h(\vec{y}, y)) = \forall \vec{x} \exists y \delta_f(\vec{x}, y)$$
schliessen können. Somit erfüllt $\delta_f(\vec{x}, y)$ die Existenz in (b). Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von (b) für δ_{g_i} und δ_h.

- Sei $f = \mathbf{Op}(g, h)$, wobei g, h beweisbar rekursiv sind. Somit können wir die Symbole g, h definitorisch einführen und in **PA** verwenden. Dasselbe gilt auch für die $\boldsymbol{\beta}$-Funktion, da diese nur mittels **Oc** definiert wird. Nach Voraussetzung gilt: $f(\vec{a}, 0) = g\vec{a}$ und $f(\vec{a}, \mathbf{S}b) = h(\vec{a}, b, f(\vec{a}, b))$. Wir betrachten $\delta_f(\vec{x}, y, z) := \exists u \gamma(u, \vec{x}, y, z)$ mit
$$\gamma(u, \vec{x}, y, z) := \boldsymbol{\beta} u0 = g\vec{x} \wedge (\forall v < y)\boldsymbol{\beta} u\mathbf{S}v = h(\vec{x}, v, \boldsymbol{\beta} uv) \wedge \boldsymbol{\beta} uy = z.$$

Insbesondere ist δ_f eine Σ_1-Formel, weil $\boldsymbol{\beta}, g$ und h Σ_1-definierbar sind.
Seien nun $\vec{a} \in \mathbb{N}^n, b \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir setzen $c_i := f(\vec{a}, i)$ für alle $i \leq b$. Gemäss Proposition 5 in [WD] gibt es dann ein $c \in \mathbb{N}$ mit $\boldsymbol{\beta}(c, i) = c_i$ für alle $i \leq b$. Damit erhalten wir bereits $\mathcal{N} \models \gamma(\underline{c}, \underline{\vec{a}}, \underline{b}, \overline{f(\vec{a}, b)})$, und mit Partikularisierung folgt auch $\mathcal{N} \models \delta_f(\underline{\vec{a}}, \underline{b}, \overline{f(\vec{a}, b)})$, also haben wir (a') überprüft.
Für (b) zeigen wir zuerst die Eindeutigkeit. Dazu weist man induktiv über y nach, dass $\gamma(u, \vec{x}, y, z) \wedge \gamma(u', \vec{x}, y, z') \vdash_{\mathsf{PA}} (\forall v \leq y)\boldsymbol{\beta} uv = \boldsymbol{\beta} u'v$ gilt und erhält dann insbesondere $\gamma(u, \vec{x}, y, z) \wedge \gamma(u', \vec{x}, y, z') \vdash_{\mathsf{PA}} z = z'$. Der Induktionsanfang folgt aus $\gamma(u, \vec{x}, 0, z), \gamma(u', \vec{x}, 0, z') \vdash_{\mathsf{PA}} \boldsymbol{\beta} u0 = g\vec{x},\ \boldsymbol{\beta} u'0 = g\vec{x} \vdash_{\mathsf{PA}} \boldsymbol{\beta} u0 = \boldsymbol{\beta} u'0$
$\vdash_{\mathsf{PA}} (\forall v \leq 0)\boldsymbol{\beta} uv = \boldsymbol{\beta} u'v$. Den Induktionsschritt führt man mit analogen Argumenten.
Auch die Existenz $\vdash_{\mathsf{PA}} \exists z \delta_f(\vec{x}, y, z)$ zeigt man per Induktion über y. Für eine detaillierte Beweisführung sei auf [GJ], Seiten 15-17 verwiesen. Insbesondere verwendet man dazu 2. in Lemma 2.10.

Nun müssen mir noch nachweisen, dass die Rekursionsgleichungen in **PA** gelten; konkret bedeutet das:

$$(1)\ \vdash_{\mathsf{PA}} f(\vec{x}, 0) = g\vec{x}, \qquad (2)\ \vdash_{\mathsf{PA}} f(\vec{x}, \mathbf{S}y) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y).$$

Nach der Konstruktion von δ_f gilt $\vdash_{\mathsf{PA}} \delta_f(\vec{x}, 0, g\vec{x})$ und aus der Definition von f folgt $\vdash_{\mathsf{PA}} \delta_f(\vec{x}, 0, f(\vec{x}, 0))$. Damit erhält man (1) mit der Eindeutigkeit in (b).

(2) zeigen wir per $<$-Induktion über y. Diese besagt: $\forall x((\forall y < x)\alpha\frac{y}{x} \to \alpha) \vdash_{\mathsf{PA}} \forall x \alpha$ für jede Formel α. Dazu definieren wir $\alpha(\vec{x}, y) := f(\vec{x}, \boldsymbol{S}y) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$. Wir setzen $\varphi := (\forall v < y)\alpha\frac{v}{y}$, also ist zu zeigen: $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha$. Wir haben $\vdash_{\mathsf{PA}} \delta_f(\vec{x}, \mathbf{S}y, f(\vec{x}, \mathbf{S}y)) = \exists u \gamma(u, \vec{x}, \mathbf{S}y, f(\vec{x}, \mathbf{S}y))$, also insbesondere $\vdash_{\mathsf{PA}} \boldsymbol{\beta} u\mathbf{S}y = h(\vec{x}, y, \boldsymbol{\beta} uy) \wedge \boldsymbol{\beta} u\mathbf{S}y = f(\vec{x}, \mathbf{S}y)$ $\vdash_{\mathsf{PA}} f(\vec{x}, \mathbf{S}y) = h(\vec{x}, y, \boldsymbol{\beta} uy) (*)$. Zusätzlich erhalten wir $\vdash_{\mathsf{PA}} (\forall v < \mathbf{S}y)\boldsymbol{\beta} u\mathbf{S}v = h(\vec{x}, v, \boldsymbol{\beta} uv) (**)$.
Wir wissen gemäss [LF]: $\vdash_{\mathsf{PA}} y = 0 \vee \exists z(\mathbf{S}z = y)$. Nach $(\neg 2)$ genügt es zu zeigen:

$$(i)\ \varphi, y = 0 \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha, \qquad (ii)\ \varphi, \exists z(\mathbf{S}z = y) \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha.$$

(i) folgt direkt aus (1) und $(*)$.
Für (ii) folgern wir aus $(**)$ $\varphi, \exists z(\mathbf{S}z = y) \vdash_{\mathsf{PA}} \boldsymbol{\beta} uy = h(\vec{x}, z, \boldsymbol{\beta} uz)$ und dann zeigt man induktiv über z nach Definition von φ leicht $\varphi, \exists z(\mathbf{S}z = y) \vdash_{\mathsf{PA}} \boldsymbol{\beta} uy = f(\vec{x}, y)$. Mit $(*)$ können wir nun schliessen $\varphi, \exists z(\mathbf{S}z = y) \vdash_{\mathsf{PA}} f(\vec{x}, \mathbf{S}y) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$, also (ii). Damit ist auch (2) bewiesen. $\square$

Für den Nachweis von $(D2)$ betrachten wir zuerst:

$$(D2^*) :\ \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(u, x) \wedge \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(v, x \tilde{\to} y) \vdash_T \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(u * v * \langle y \rangle, y),$$

wobei wir die p.r. Funktionen $\tilde{\to}, *$ und $y \mapsto \langle y \rangle$ gemäss Satz 2.11 in **PA** definitorisch einführen können.

Lemma 2.12. *Die Ableitungsbedingung* $(D2)$ *folgt aus* $(D2^*)$*.*

Beweis. Da $\tilde{\rightarrow}$ in **PA** definierbar ist, gilt $\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner = \overline{\dot{\alpha}\tilde{\rightarrow}\dot{\beta}} = \underline{\dot{\alpha}}\tilde{\rightarrow}\underline{\dot{\beta}} = \ulcorner \alpha \urcorner \tilde{\rightarrow} \ulcorner \beta \urcorner$ und mit $(D2^*)$ folgt dann $\mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(u, \ulcorner \alpha \urcorner) \wedge \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(v, \ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner) \vdash_{\mathsf{PA}} \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(u * v * \langle \ulcorner \beta \urcorner \rangle, \ulcorner \beta \urcorner)$. Durch Partikularisierung erhalten wir $(D2)$. $\square$

Wir möchten nun $(D2^*)$ sowie die Eigenschaft

$$(D2^{**}) : \square(x) \wedge \square(x \tilde{\rightarrow} y) \vdash_{\mathsf{PA}} \square(y),$$

welche wir für den Beweis von $(D3)$ benutzen werden, nachweisen. Dazu formulieren wir diese Eigenschaften zuerst in $\mathbb{N}$.

Wir erinnern hier kurz an folgende Prädikate, die in [AA] eingeführt wurden, wobei hier T eine beliebige Theorie mit Axiomensystem X sei.

$beweis_T(b) :\Longleftrightarrow b \in Gz \,\&\, (\forall k < \ell b) P(b,k)$ mit $P(b,k) :\Longleftrightarrow [(b)_k \in \dot{X} \cup \dot{\Lambda}$ oder $(\exists i,j < k)(b)_i = (b)_j \tilde{\rightarrow} (b)_k]$,

$bew_T(b,a) :\Longleftrightarrow beweis_T(b) \,\&\, a = (b)_{last}$,

$bwb_T(a) :\Longleftrightarrow \exists b \, bew_T(b,a)$.

Diese Prädikate erfüllen folgende Eigenschaften:

Lemma 2.13.

1. $bew_T(c,a) \,\&\, bew_T(d, a \tilde{\rightarrow} b) \Rightarrow bew_T(c * d * \langle b \rangle, b)$, *für alle* a,b,c,d,

2. $bwb_T(a) \,\&\, bwb_T(a \tilde{\rightarrow} b) \Rightarrow bwb_T(b)$, *für alle* a,b.

Beweis. 1. Nach Voraussetzung sind $c,d \in Gz$ und somit gilt $u := c * d * \langle b \rangle \in Gz$ und mit $c,d \neq 1$ folgt auch $u \neq 1$. Wir haben $\ell u = \ell(c * d * \langle b \rangle) = \ell c + \ell d + \ell \langle b \rangle = \ell c + \ell d + 1$. Für $k < \ell c$ gilt $(u)_k = (c)_k \in \dot{X} \cup \dot{\Lambda}$ oder $(\exists i,j < k)(u)_i = (c)_i = (c)_j \tilde{\rightarrow} (c)_k = (u)_j \tilde{\rightarrow} (u)_k$. Somit haben wir $P(u,k)$ für alle $k < \ell c$ nachgewiesen, und analog zeigt man $P(u, \ell c + k)$ für alle $k < \ell d$ mit Hilfe von $(u)_{\ell c + k} = (d)_k$ für alle $k < \ell d$. Für $k = \ell c + \ell d$ haben wir: $(u)_{\ell c + \ell d - 1} = (d)_{last} = a \tilde{\rightarrow} b = (c)_{last} \tilde{\rightarrow} (u)_k$, womit auch $P(u, \ell c + \ell d)$ erfüllt ist. Insgesamt haben wir also 1. bewiesen.

2. Folgt direkt aus 1.

$\square$

Indem wir Lemma 2.13 für $T = \mathbf{PA}$ in **PA** formalisieren, also deren Beweis innerhalb von **PA** durchführen, erhalten wir $(D2^*), (D2^{**})$ aus 1. respektive 2. Für genauere Ausführungen der formalen Beweise sei auf [BG], Kapitel 2, insbesondere Seiten 37-44 verwiesen.

Wir erinnern hier kurz an die in [WD] eingeführte Substitutionsfunktion: Für $a \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{zf}\, a := (\underline{a})^{\cdot}$ die Gödelzahl von $\underline{a}$. Damit definieren wir $\mathrm{sb}_{\emptyset}(m) := m, \mathrm{sb}_x(m,a) := [m]_{\dot{x}}^{\mathrm{zf}\, a}$, sowie induktiv $\mathrm{sb}_{\vec{x}x}(m,\vec{a},a) := \mathrm{sb}_x(\mathrm{sb}_{\vec{x}}(m,\vec{a}),a)$. Nach Satz 10 in [WD] gilt dann für alle $\alpha(\vec{x}) \in \mathcal{L}_{ar}$ und für alle $\vec{a} \in \mathbb{N}^n : \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\dot{\alpha},\vec{a}) = (\alpha_{\vec{x}}(\underline{\vec{a}}))^{\cdot}$.

Lemma 2.14. *Dann gelten folgende Gleichungen Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{ar}$ und für alle $\vec{a} \in \mathbb{N}^n, a \in \mathbb{N}$ gelten folgende Gleichungen:*

1. $\mathrm{sb}_{\vec{x}}((\alpha \wedge \beta)^{\cdot},\vec{a}) = \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\dot{\alpha},\vec{a}) \,\tilde{\wedge}\, \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\dot{\beta},\vec{a})$, *und analog für* $\neg, \rightarrow$ *und* $\forall$.
2. $\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\dot{\alpha},\vec{a}) = \mathrm{sb}_{\vec{x}'}(\dot{\alpha},\vec{a}')$ *mit $\vec{x}$ so, dass $var\, \vec{x}' = var\, \vec{x} \cap frei\, \alpha$ und $\vec{a}' := \vec{x}'(\vec{a})$.*
3. *Sei $t \in \{0, y, \mathbf{S}y\}$ und $b \in \{0, a, \mathbf{S}a\}$. Dann gelten:*
   - *(i)* $\mathrm{sb}_{\vec{x}x}(\dot{\alpha},\vec{a},b) = \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\dot{\alpha}\frac{t}{x},\vec{a})$, *falls $x \notin frei\, \alpha$ oder $y \in var\, \vec{x}$.*
   - *(ii)* $\mathrm{sb}_{\vec{x}x}(\dot{\alpha},\vec{a},b) = \mathrm{sb}_{\vec{x}y}(\dot{\alpha}\frac{t}{x},\vec{a},a)$, *falls $x \notin var\, \vec{x}, y \notin gbd\, \alpha$, (also $\alpha, \frac{t}{x}$ kollisionsfrei).*

Beweis. Im Wesentlichen folgen die Eigenschaften aus der Definition von $\mathrm{sb}_{\vec{x}}$ sowie dem oben genannten Satz 10. Wir beweisen nur 1., und zwar induktiv über die Länge n von $\vec{x}$. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Nun zum Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sb}_{\vec{x}x}((\alpha \wedge \beta)^{\cdot},\vec{a},a) &= \mathrm{sb}_x(\mathrm{sb}_{\vec{x}}((\alpha \wedge \beta)^{\cdot},\vec{a}),a) && = \mathrm{sb}_x(\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\dot{\alpha},\vec{a}) \,\tilde{\wedge}\, \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\dot{\beta},\vec{a}),a) \\
&= \mathrm{sb}_x(\alpha_{\vec{x}}(\underline{\vec{a}})^{\cdot} \,\tilde{\wedge}\, \beta_{\vec{x}}(\underline{\vec{a}})^{\cdot},\underline{a}) && = \mathrm{sb}_x((\alpha_{\vec{x}}(\underline{\vec{a}}) \wedge \beta_{\vec{x}}(\underline{\vec{a}}))^{\cdot},\underline{a}) \\
&= \mathrm{sb}_x(((\alpha \wedge \beta)_{\vec{x}}(\underline{\vec{a}}))^{\cdot},\underline{a}) && = ((\alpha \wedge \beta)_{\vec{x}}(\underline{\vec{a}})_x(\underline{a}))^{\cdot} \\
&= ((\alpha \wedge \beta)_{\vec{x}x}(\underline{\vec{a}},\underline{a}))^{\cdot} && = (\alpha_{\vec{x}x}(\underline{\vec{a}},\underline{a}) \wedge \beta_{\vec{x}x}(\underline{\vec{a}},\underline{a}))^{\cdot} \\
&= (\alpha_{\vec{x}x}(\underline{\vec{a}},\underline{a}))^{\cdot} \,\tilde{\wedge}\, (\beta_{\vec{x}x}(\underline{\vec{a}},\underline{a}))^{\cdot} && = \mathrm{sb}_{\vec{x}x}(\dot{\alpha},\vec{a},a) \,\tilde{\wedge}\, \mathrm{sb}_{\vec{x}x}(\dot{\beta},\vec{a},a).
\end{aligned}$$

Für $\neg, \rightarrow$ und $\forall$ verläuft der Beweis analog. □

Da die Substitutionsfunktion $\mathrm{sb}_{\vec{x}}$ p.r. ist, ist sie beweisbar rekursiv und wir können sie in **PA** explizit definieren; wir verwenden dafür dasselbe Symbol. Somit können wir die Gleichungen aus Lemma 2.14 wie folgt formalisieren:

Lemma 2.15.

1. $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner(\alpha \wedge \beta)\urcorner,\vec{x}) = \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x})\tilde{\wedge}\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\beta\urcorner,\vec{x})$ *und analog für* $\neg, \rightarrow$ *und* $\forall$.
2. $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x}) = \mathrm{sb}_{\vec{x}'}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x}')$ *mit $var\vec{x}' := var\vec{x} \cap frei\, \alpha$. Insbesondere gilt dann für Aussagen $\alpha \in \mathcal{L}_{ar}{}^0$ (also mit $frei\, \alpha = \emptyset$):* $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x}) = \mathrm{sb}_{\emptyset}(\ulcorner\alpha\urcorner) = \ulcorner\alpha\urcorner$.
3. *Sei $t \in \{0, y, \mathbf{S}y\}$. Dann gelten:*
   - *(i)* $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}x}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x},t) = \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\frac{t}{x}\urcorner,\vec{x})$, *falls $x \notin frei\, \alpha$ oder $y \in var\, \vec{x}$,*
   - *(ii)* $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}x}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x},t) = \mathrm{sb}_{\vec{x}y}(\ulcorner\alpha\frac{t}{x}\urcorner,\vec{x},y)$, *falls $x \notin var\, \vec{x}$ und $y \notin gbd\alpha$.*

Definition 2.16. Ab jetzt verwenden wir $\Box(x) = \mathbf{bwb}_{\mathsf{T}}(x)$ im eingeschränkten Sinne mit $\mathbf{T} = \mathbf{PA}$. Für eine Formel $\alpha = \alpha(\vec{x})$ definieren wir $\Box[\alpha] := \mathbf{bwb}_{\mathsf{PA}}\frac{\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x})}{x}$.

Bemerkung 2.17. Nach der obigen Bemerkung gilt $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x}) = \mathrm{sb}_{\vec{x}'}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x}')$ mit $var\vec{x}' = frei\,\alpha$. Wir können also ohne Einschränkung $frei\,\Box[\alpha] = frei\,\alpha$ annehmen. Für Aussagen $\alpha \in \mathcal{L}_{ar}{}^0$ gilt nach 2. in Lemma 2.15 $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}}\,(\ulcorner\alpha\urcorner,\,\vec{x}) = \ulcorner\alpha\urcorner$, also insbesondere $\Box[\alpha] \equiv_{\mathsf{PA}} \Box\alpha$. Mit Generalisierung ist $\vdash_{\mathsf{PA}} \Box[\alpha]$ äquivalent zu $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall\vec{x}\Box[\alpha]$ und wiederspiegelt den Sachverhalt '$\vdash_{\mathsf{PA}} \alpha(\underline{\vec{a}})$ für alle $\vec{a}$'.

Beispiel 2.18. Sei $\alpha(x,y) = \mathbf{S}x = y$. Wir möchten zeigen: $\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \Box[\alpha]$. Nach Definition von α ist dies äquivalent zu $\vdash_{\mathsf{PA}} (\Box[\alpha])\frac{\mathbf{S}x}{y}$, denn $(\Box[\alpha])\frac{\mathbf{S}x}{y}, \mathbf{S}x = y \vdash_{\mathsf{PA}} \Box[\alpha]$. Nach 3. in Lemma 2.15 gilt dann $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{xy}(\ulcorner\alpha\urcorner, x, \mathbf{S}x) = \mathrm{sb}_x(\ulcorner\alpha\frac{\mathbf{S}x}{y}\urcorner, x)$, also genügt es $\vdash_{\mathsf{PA}} \Box[\beta]$ mit $\beta(x) := \alpha\frac{\mathbf{S}x}{y} = \mathbf{S}x = \mathbf{S}x$ zu überprüfen. Dazu betrachten wir die Funktion $\tilde{\beta}$: $a \mapsto \tilde{\beta}(a) := \mathrm{sb}_x(\dot{\beta}, a) = \dot{\beta}(\underline{a})$, welche p.r. ist und nach Konstruktion die Gödelzahl von $\beta(\underline{a})$ bezeichnet. Wegen Satz 2.12 ist $\tilde{\beta}$ in **PA** definierbar und wir verwenden wieder dasselbe Symbol. Nach dem Axiom $\Lambda 9$ $(t = t)$ ist $\langle\tilde{\beta}(a)\rangle$ ein arithmetisierter Beweis von $\tilde{\beta}(a) = (\mathbf{S}\underline{a} = \mathbf{S}\underline{a})^{\cdot}$. In **PA** formalisiert bedeutet das: $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(\langle\tilde{\beta}(x)\rangle, \tilde{\beta}(x))$, also $\vdash_{\mathsf{PA}} \exists y \mathbf{bew}_{\mathsf{PA}}(y, \tilde{\beta}(x)) = \Box(\mathrm{sb}_x(\ulcorner\beta\urcorner), x)) = \Box[\beta]$.

Lemma 2.19. *Für Formeln $\alpha = \alpha(\vec{x})$ und $\beta = \beta(\vec{x})$ gilt:*

1. $\vdash_{\mathsf{PA}} \alpha \Rightarrow \vdash_{\mathsf{PA}} \Box[\alpha]$,
2. $\Box[\alpha \to \beta] \vdash_{\mathsf{PA}} \Box[\alpha] \to \Box[\beta]$,
3. $\Box[\alpha]\frac{t}{x} \equiv_{\mathsf{PA}} \Box[\alpha\frac{t}{x}]$ *für* $t \in \{0, y, \mathbf{S}y\}$ *mit* $y \notin gbd\,\alpha$.

Beweis. 1. Wir nehmen an $\vdash_{\mathsf{PA}} \alpha$, somit gilt auch $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall\vec{x}\alpha$ und nach $(D1)$ $\vdash_{\mathsf{PA}} \Box\forall\vec{x}\alpha$. Ein Beweis von $\forall\vec{x}\alpha$ liefert ähnlich wie in Beispiel 2.18 für jedes $\vec{a} \in \mathbb{N}^n$ in p.r. Weise einen Beweis für $\alpha(\underline{\vec{a}})$ gemäss dem Axiom $\Lambda 5$ (dieses besagt: $\forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$ falls $\alpha, \frac{t}{x}$ kollisionsfrei sind). Wenn wir dies in **PA** formalisieren, erhalten wir: $\Box\forall\vec{x}\alpha$ $\vdash_{\mathsf{PA}} \Box(\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner, \vec{x})) = \Box[\alpha]$.

2. Wir setzen $\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x}), \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\beta\urcorner,\vec{x})$ für x, y in $(D2^{**})$ ein:

$$\Box(\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x})) \wedge \Box(\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x})\tilde{\to}\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\beta\urcorner,\vec{x})) \vdash_{\mathsf{PA}} \Box(\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\beta\urcorner,\vec{x})).\ (*)$$

Nach 2. in Lemma 2.15 gilt: $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha\urcorner,\vec{x})\tilde{\to}\mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\beta\urcorner,\vec{x}) = \mathrm{sb}_{\vec{x}}(\ulcorner\alpha \to \beta\urcorner,\vec{x})$, also folgt die Behauptung mit dem Deduktionstheorem.

3. Folgt mit Rechnung aus 3. in Lemma 2.15.

$\Box$

Satz 2.20. *Sei $\partial : \mathcal{L}_{ar} \to \mathcal{L}_{ar}$ ein Operator mit $frei\,\partial\alpha \subseteq frei\,\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{L}_{ar}$, der folgende Eigenschaften erfüllt:*

d1: $\vdash_{\mathsf{PA}} \alpha \Rightarrow \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha$,

d2: $\partial(\alpha \to \beta) \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha \to \partial\beta$,

ds: $(\partial\alpha)\frac{t}{x} \equiv_{\mathsf{PA}} \partial(\alpha\frac{t}{x})$, *wobei* $t \in \{0, y, \mathbf{S}y\}$, *für ein* $y \notin gbd\,\alpha$.

Dann gilt $(*) : \alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha$ *für alle* Σ_1*-Formeln* $\alpha \in \mathcal{L}_{ar}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass ∂ mit $d1$ und $d2$ auch folgende Bedingungen erfüllt (wobei sich diese auch auf beliebige Theorien T verallgemeinern lassen):

d0: $\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \beta \Rightarrow \partial\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta$.

d00: $\alpha \equiv_{\mathsf{PA}} \beta \Rightarrow \partial\alpha \equiv_{\mathsf{PA}} \partial\beta$.

d∧: $\partial(\alpha \wedge \beta) \equiv_{\mathsf{PA}} \partial\alpha \wedge \partial\beta$.

Der Beweis von $d0$ verläuft genau gleich wie derjenige von $(D0)$ gemäss Bemerkung 2.4 und $d00$ ist eine direkte Konsequenz von $d0$. Wegen $\alpha \wedge \beta \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha, \beta$ folgt mit $d0 : \partial(\alpha \wedge \beta) \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha, \partial\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha \wedge \partial\beta$. Umgekehrt gilt wegen $d0$ und $d2$: $\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \beta \to \alpha \wedge \beta \Rightarrow \partial\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\beta \to \alpha \wedge \beta) \Rightarrow \partial\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta \to \partial(\alpha \wedge \beta)$ und somit folgt $\partial\alpha \wedge \partial\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\alpha \wedge \beta)$ mit dem Deduktionstheorem. Damit haben wir auch $d\wedge$ gezeigt.

Es genügt die Behauptung für spezielle Σ_1-Formeln nachzuweisen.

- Sei α die Formel $\mathbf{S}x = y$. Wegen $\vdash_{\mathsf{PA}} \mathbf{S}x = \mathbf{S}x$ gilt nach $d1$: $\vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\mathbf{S}x = \mathbf{S}x) = \partial(\alpha\frac{\mathbf{S}x}{y})$. Aus ds erhalten wir dann $\vdash_{\mathsf{PA}} (\partial\alpha)\frac{\mathbf{S}x}{y}$ und mit $(=)$ erhalten wir $\alpha = (\mathbf{S}x = y) \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha$.
- Sei α die Formel $x + y = z$. Analog wie vorher können wir schliessen $y = z \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(y = z)$ $(*)$. Wir zeigen per Induktion über x $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall yz(\alpha \to \partial\alpha)$. Für den Induktionsanfang verwenden wir $\alpha\frac{0}{x} \equiv_{\mathsf{PA}} y = z$ und erhalten mit $d00 : \partial(\alpha\frac{0}{x}) \equiv_{\mathsf{PA}} \partial(y = z)$. Aus $(*)$ folgt dann $\alpha\frac{0}{x} \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\alpha\frac{0}{x}) \equiv_{\mathsf{PA}} (\partial\alpha)\frac{0}{x}$, also $\vdash_{\mathsf{PA}} \alpha\frac{0}{x} \to (\partial\alpha)\frac{0}{x} = (\alpha \to \partial\alpha)\frac{0}{x} \equiv_{\mathsf{PA}} \forall yz(\alpha \to \partial\alpha)\frac{0}{x}$. Für den Induktionsschritt benutzen wir $\alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \equiv_{\mathsf{PA}} \alpha\frac{\mathbf{S}x}{x}$, woraus dann $\partial\alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \equiv_{\mathsf{PA}} \partial\alpha\frac{\mathbf{S}x}{x}$ folgt. Damit gilt $\forall yz(\alpha \to \partial\alpha) \vdash_{\mathsf{PA}} \forall y(\alpha \to \partial\alpha) \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \to (\partial\alpha)\frac{\mathbf{S}y}{y} \equiv_{\mathsf{PA}} \alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \to \partial\alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha\frac{\mathbf{S}x}{x} \to \partial\alpha\frac{\mathbf{S}x}{x} = (\alpha \to \partial\alpha)\frac{\mathbf{S}x}{x} \equiv_{\mathsf{PA}} \forall yz(\alpha \to \partial\alpha)\frac{\mathbf{S}x}{x}$.
- Für die Formel $x \cdot y = z$ verläuft der Beweis analog.
- Sei $\alpha = \beta \wedge \gamma$, wobei β, γ die Eigenschaft $(*)$ bereits erfüllen. Dann folgt nach $d\wedge$: $\beta \wedge \gamma \vdash_{\mathsf{PA}} \beta, \gamma \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta, \partial\gamma \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta \wedge \partial\gamma \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\beta \wedge \gamma)$.
- Sei i $\alpha = \beta \vee \gamma$ wobei für β, γ $(*)$ bereits erfüllt ist. Dann gilt wegen $d0$: $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\beta \vee \gamma)$ und analog für γ, also ergibt sich insgesamt $\beta \vee \gamma \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\beta \vee \gamma)$.

- Sei $\alpha = \exists x\beta$ mit $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta$. Dann folgt aus $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \exists x\beta$ mit $d0$ auch $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\exists x\beta)$. Nun können wir wegen $x \notin frei\,\partial\exists x\beta$ vordere Partikularisierung anweden, was $\exists x\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\exists x\beta$ impliziert.

- Falls $\alpha = \beta\frac{t}{x}$ mit $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta$. Daraus und mit ds können wir folgern $\beta\frac{t}{x} \vdash_{\mathsf{PA}} (\partial\beta)\frac{t}{x} \equiv_{\mathsf{PA}} \partial(\beta\frac{t}{x})$.

- Sei nun $\alpha = (\forall x < y)\beta$ mit $y \notin var\beta$, wobei $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\beta$ erfüllt ist. Wir verwenden nun Induktion über y um zu zeigen, dass auch $\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha$ gilt. Wegen $d1$ und ds folgt $\alpha\frac{0}{y} \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\alpha\frac{0}{y}) \equiv_{\mathsf{PA}} (\partial\alpha)\frac{0}{y}$ und daher ist der Induktionsanfang $\alpha\frac{0}{y} \vdash_{\mathsf{PA}} (\partial\alpha)\frac{0}{y}$ erfüllt. Für den Induktionsschritt verwenden wir $\alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \equiv_{\mathsf{PA}} \alpha \wedge \beta\frac{y}{x}$ sowie $\beta\frac{y}{x} \vdash_{\mathsf{PA}} \partial(\beta\frac{y}{x})$ wie wir soeben gezeigt haben. Dies liefert mit Hilfe von $d\wedge$ und $d00$ nun $\alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \wedge (\alpha \to \partial\alpha) \equiv_{\mathsf{PA}} \alpha \wedge \beta\frac{y}{x} \wedge (\alpha \to \partial\alpha) \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha \wedge \beta\frac{y}{x} \vdash_{\mathsf{PA}} \partial\alpha \wedge \partial(\beta\frac{y}{x}) \equiv_{\mathsf{PA}} \partial(\alpha \wedge \beta\frac{y}{x}) \equiv_{\mathsf{PA}} \partial(\alpha\frac{\mathbf{S}y}{y})$, woraus wie gewünscht $\alpha \to \partial\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha\frac{\mathbf{S}y}{y} \to \partial(\alpha\frac{\mathbf{S}y}{y})$ folgt.

$\square$

Daraus können wir nun folgern:

Corollar 2.21. *Die Theorie* **PA** *erfüllt die Ableitungsbedingungen* $(D1) - (D3)$.

Beweis. $(D1)$ und $(D2)$ haben wir bereits vorhin verifiziert, es bleibt somit nur noch der Nachweis von $(D3)$. Sei also $\alpha \in \mathcal{L}_{ar}$ beliebig. Gemäss Lemma 2.19 erfüllt der Operator $\partial\beta := \square[\beta]$ die Bedingungen $d1, d2$ und ds und wegen Bemerkung 2.17 gilt $frei\,\square[\beta] = frei\,\beta$, also erhalten wir mit Satz 2.20 $\beta \vdash_{\mathsf{PA}} \square[\beta]$ $(*)$ für alle Σ_1-Formeln $\beta \in \mathcal{L}_{ar}$.
Insbesondere ist gemäss Satz 4.2 in [RW] (Repräsentationssatz; jede rekursive Funktion und jedes rekursive Prädikat ist durch eine Σ_1-Formel repräsentierbar) $\beta := \square\alpha$ eine Σ_1-Aussage. Mit $(*)$ ergibt sich nun $\square\alpha \vdash_{\mathsf{PA}} \square[\square\alpha] = \square\square\alpha$, also $(D3)$. $\square$

3 Anhang

Beispiel 3.1. Exemplarisch für die Übertragung von zahlentheoretischen Aussagen in **PA** zeigen wir:

$$\vdash_{\mathsf{PA}} (\forall x > 1)\exists p(\text{prim}p \wedge p \mid x),$$

wobei wir $y \mid x \leftrightarrow \exists z(y \cdot z = x)$ sowie $\text{prim}(p) \leftrightarrow p > 1 \wedge \forall x(x \mid p \to (x = 1 \vee x = p))$ definitorisch einführen. Wir beweisen dies ganz analog zum Beweis im Modell $\mathcal{N}$, indem wir die Behauptung für $y < x$ annehmen und dann Fallunterscheidung machen, ob x bereits prim ist oder nicht (die Möglichkeit der Fallunterscheidung kommt bei der Schlussregel $(\neg 2)$ zum Ausdruck). Der Einfachheit halber verwenden wir ohne Beweis einige (in **PA** leicht zu überprüfende) Eigenschaften:

$$(a)\; y \mid x, y \neq x \vdash_{\mathsf{PA}} y < x, \qquad (b)\; y \mid x, x > 1 \vdash_{\mathsf{PA}} y \geq 1, \qquad (c)\; z \mid y, y \mid x \vdash_{\mathsf{PA}} z \mid x.$$

Wir wenden nun die $<$-Induktion auf $\alpha(x) := x > 1 \to \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid x)$ an; wir müssen also zeigen: $\vdash_{\mathsf{PA}} \beta \to \alpha$ mit $\beta := \beta(x) := (\forall y < x)\alpha\frac{y}{x}$. Dann folgt die Behauptung mit dem Deduktionstheorem und Generalisierung. Nach $(\neg 2)$ genügt es nachzuweisen:

$$(1)\ \beta, \mathrm{prim} x \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha, \qquad\qquad (2)\ \beta, \neg\mathrm{prim} x \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha.$$

Zuerst zeigen wir (1): Mit (P6), (P3) und (P2) erhalten wir $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall x(x \cdot 1 = x \cdot 0 + x)$ $\vdash_{\mathsf{PA}} \forall x(x \cdot 1 = 0 + x) \vdash_{\mathsf{PA}} \forall x(x \cdot 1 = x \vdash_{\mathsf{PA}} x \cdot 1 = x \vdash_{\mathsf{PA}} \exists y(x \cdot y = x) = x \mid x$. Also folgt $\beta, \mathrm{prim} x \vdash_{\mathsf{PA}} \mathrm{prim} x \wedge x \mid x \vdash_{\mathsf{PA}} \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid x) \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha$.

Nun zeigen wir (2):

$$\begin{aligned}
\neg\mathrm{prim} x &\equiv_{\mathsf{PA}} \neg(x > 1) \vee \neg(\forall z(z \mid x \to (z = 1 \vee z = x))) \\
&\equiv_{\mathsf{PA}} \neg(x > 1) \vee \exists z(\neg(z \mid x \to (z = 1 \vee z = x))) \\
&\equiv_{\mathsf{PA}} \neg(x > 1) \vee \exists z(z \mid x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x).
\end{aligned}$$

Wir wenden erneut $(\neg 2)$ an für die Fallunterscheidung $x > 1$ bzw. $\neg(x > 1)$.
Offensichtlich gilt $\beta, \neg\mathrm{prim} x, \neg(x > 1) \vdash_{\mathsf{PA}} \alpha$.

$$\begin{aligned}
\beta, \neg\mathrm{prim} x, x > 1 &\vdash_{\mathsf{PA}} \exists z(z \mid x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x) \wedge (\forall y < x)(y > 1 \to \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid y)) \\
&\vdash_{\mathsf{PA}} \exists z(z \mid x \wedge z \neq 1 \wedge z \neq x \wedge (\forall y < x)(y > 1 \to \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid y))) \\
&\overset{(a)}{\vdash_{\mathsf{PA}}} \exists z(z \mid x \wedge z \neq 1 \wedge z < x \wedge (\forall y < x)(y > 1 \to \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid y))) \\
&\vdash_{\mathsf{PA}} \exists z(z \mid x \wedge z \neq 1 \wedge (z > 1 \to \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid z))) \\
&\overset{(b)}{\vdash_{\mathsf{PA}}} \exists z(z \mid x \wedge \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid z)) \\
&\vdash_{\mathsf{PA}} \exists z \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid z \wedge z \mid x) \\
&\overset{(c)}{\vdash_{\mathsf{PA}}} \exists z \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid x) \equiv_{\mathsf{PA}} \exists p(\mathrm{prim} p \wedge p \mid x).
\end{aligned}$$

Somit haben wir auch (2) überprüft. Insgesamt folgt also die Behauptung.
Mit diesem Beispiel kann man dann die eindeutige Primfaktorzerlegung in **PA** zeigen, was wiederum für den Nachweis von $(D2)$ verwendet wird.

4 Literatur

Folgende Abkürzungen bezeichnen Skripte aus den vorangehenden Vorträgen dieses Seminars:

[AA] Abächerli, Angelo. *Gödelisierung von Formeln.*

[LF] Leonardi, Filippo. *Peano-Axiome und Peano-Strukturen.*

[SM] Schatz, Michael. *Repräsentierbarkeit arithmetischer Formeln.*

[WD] Wyss Dimitri. *Der Repräsentationssatz.*

Das Skript stüzt sich auf folgende Literatur:

[RW] Rautenberg, Wolfgang. *Einführung in die mathematische Logik.* Vieweg-Teubner, 2008.

[GJ] Gerland, Jürgen. *"Bachelorarbeit" im Fach Mathematik. Universität Hannover. Untersuchung der Selbstreferenz logischer Systeme unter Benutzung modaler Logiken.* Universität Hannover, 2007.

[BG] Bolos, George. *The logic of Provability.* Cambridge University Press, 1993.