Seminar: Mathematische Logik FS 2012

Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Emil Jørgensen

30-05-2012

Dieses Skript ist eine wenig veränderte Version des ersten Teil des Abschnittes **(7.2)** in [1]. Insbesondere verwenden wir die in **(7.1)** eingeführte $\Box$ Notation.

Ziel: Beweis des zweiten Unvollständigkeitssatzes.

Beweismethode: Der Beweis basiert auf den Ableitungsbedingungen, die wir im letzten Vortrag bewiesen haben. Ebenfalls, wie bei Gödels erstem Unvollständigkeitssatz, spielt das Fixpunktlemma eine Schlüsselrolle. Das Lemma erlaubt Selbstreferenz in unserer formalen Sprache $\mathcal{L}$ und, weil das arithmetische Prädikat $bew_T(b, a)$ p.r. ist, können wir über Beweisbarkeit *in* unserer Theorie T reden.

Ab jetzt sei T immer ein gödelisierbare, axiomatische Theorie, die das Fixpunktlemma aus **(6.5)** und die Ableitungsbedingungen aus **(7.1)** erfüllt.

Erinnerung:

(6.5): Fixpunktlemma: *Sei T gödelisierbar und sei* sb_x *repräsentierbar in T. Dann gibt es für beliebige $\alpha = \alpha(x) \in \mathcal{L}$ ein $\gamma \in \mathcal{L}^0$ so, dass:*

$$\gamma \equiv_T \alpha(\ulcorner\gamma\urcorner)$$

Wir wissen dass $\alpha \equiv_T \beta$ gleichwertig mit $\vdash_T \alpha \leftrightarrow \beta$ ist, d.h. γ und $\alpha(\ulcorner\gamma\urcorner))$ sind (syntaktisch) äquivalent.

(7.1): Die Ableitungsbedingungen: $[\Box\alpha := \mathbf{bwb}_T(\ulcorner\alpha\urcorner) := \exists y \mathbf{bew}_T(y, \ulcorner\alpha\urcorner)]$.

Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^0$ gilt:

$$\begin{array}{lll}
(D1): & \vdash_T \alpha \;\; \Rightarrow \; \vdash_T \Box\alpha & \\
(D2): & \vdash_T \Box\alpha \wedge \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\beta \;\; \sim \;\; (D2'): & \Box(\alpha \to \beta) \vdash_T \Box\alpha \to \Box\beta \\
(D3): & \vdash_T \Box\alpha \to \Box\Box\alpha & \\
\Rightarrow (D0): & \alpha \vdash_T \beta \;\; \Rightarrow \;\; \Box\alpha \vdash_T \Box\beta &
\end{array}$$

Der Formel $\mathbf{bwb}_T(\ulcorner\alpha\urcorner)$ entspricht *in* T der Beweisbarkeit von α in T (d.h. '$\vdash_T \alpha$') und dadurch formalisiert $\neg\mathbf{bwb}_T(\ulcorner\bot\urcorner) =: \mathsf{Con}_T$ die Konsistenz von T in T[1]. Wir formulieren zunächst den Hauptssatz dieses Vortrags.

[1] Aus letztem Vortrag wissen wir, dass unsere Wahl der Kontradiktion $\bot$ in Con_T frei ist.

Satz 1 (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz)**.** PA *erfüllt nebst dem Fixpunktlemma auch D1-D3. Jede Theorie wie oben hat die Eigenschaften:*

(1) *Ist T konsistent, dann ist* $\nvdash_T \mathsf{Con}_T$,

(2) $\vdash_T \mathsf{Con}_T \to \neg\Box\mathsf{Con}_T$

Definitionsgemäss ist T konsistent $:\Leftrightarrow (\nexists\alpha \in T : T \vdash \alpha, \neg\alpha)$. Im Beweis von Satz 1 verwenden wir folgendes Lemma.

Lemma 2. *Sei T wie oben und $\alpha, \gamma \in \mathcal{L}^0$ so, dass*

$$\gamma \equiv_T \Box\gamma \to \alpha =: (\star)$$

Dann gilt: $\gamma \equiv_T \Box\alpha \to \alpha$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\Box\gamma \equiv_T \Box\alpha$. $\quad (\Leftrightarrow \vdash_T \Box\gamma \leftrightarrow \Box\alpha)$.

$\Box\gamma \vdash_T \Box\alpha$:

$$\begin{array}{rcll} \gamma & \vdash_T & \Box\gamma \to \alpha & (\star) \\ \Box\gamma & \vdash_T & \Box(\Box\gamma \to \alpha) & (D0) =: (*) \\ \Box\gamma & \vdash_T & \Box\Box\gamma \to \Box\alpha & (D2') \text{ auf } (*) \\ \Box\gamma & \vdash_T & \Box\Box\gamma & (D3) \\ \Box\gamma & \vdash_T & \Box\alpha & (\text{MP}) \end{array}$$

$\Box\alpha \vdash_T \Box\gamma$:

$$\begin{array}{rcll} & \vdash_T & \gamma \leftrightarrow \Box\gamma \to \alpha & (\star) \\ \alpha & \vdash_T & \Box\gamma \to \alpha & (\alpha, \Box\gamma \vdash_T \alpha) \\ \alpha & \vdash_T & \gamma & (\star) \\ \Box\alpha & \vdash_T & \Box\gamma & (D0) \end{array}$$

Die Behauptung folgt durch Einsetzung von $\Box\gamma$ durch $\Box\alpha$.

q.e.d.

Beweis von Satz 1[2]:

Der Beweis von $D1 - D3$ war Gegenstand des letztes Vortrags.

(2): Definiere $\alpha = \alpha(x) = \neg\mathbf{bwb}_T(x) \in \mathcal{L}$ wie in **(6.5)**. Durch einsetzen von $\ulcorner\bot\urcorner$ bekommen wir $\neg\mathbf{bwb}_T(\ulcorner\bot\urcorner) = \neg\Box\bot = \mathsf{Con}_T$. Unter Verwendung des Fixpunktlemma:

$$\Rightarrow \quad \exists\gamma \in \mathcal{L}^0 : \gamma \equiv_T \neg\Box\gamma \equiv \neg\Box\gamma \ \vee \ \bot \ \equiv \ \Box\gamma \to \bot$$

und wegen Lemma 2 folgt, dass

$$\gamma \equiv_T \Box\bot \to \bot \ \equiv \ \neg\Box\bot \ = \ \mathsf{Con}_T$$

Weil $\equiv_T$ eine Kongruenz ist, gilt das Ersetzungstheorem aus **(2.4)** und wir bekommen mit $\gamma \equiv_T \mathsf{Con}_T$ und $\gamma \equiv_T \neg\Box\gamma$ sofort $\mathsf{Con}_T \equiv_T \neg\Box\mathsf{Con}_T$, oder gleichwertig, $\vdash_T \mathsf{Con}_T \leftrightarrow \neg\Box\mathsf{Con}_T$.

[2] Bemerke, $\equiv$ beschreibt semantische Äquivalenz.

(1): Folgt direkt aus (2): Wir nehmen an, dass $\vdash_T \mathsf{Con}_T$. Dann gilt mit $(D1)$ auch $\vdash_T \Box\mathsf{Con}_T$, aber $\vdash_T \neg\Box\mathsf{Con}_T$ folgt wegen (1), d.h. T ist inkonsistent.

q.e.d.

Daraus folgt, dass alle gödelisierbaren, axiomatischen konsistenten Theorien, die das Fixpunktlemma und die Ableitungsbedingungen erfüllen, ihre eigene Konsistenz nicht beweisen können. Insbesondere gilt das auch für PA.

Literatur:

[1] W. Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*, Vieweg-Teubner, 2008.