Seminar über mathematische Logik:

Hilbert-Kalkül

Zak Turcinovic

29. Februar 2012

Das Folgende ist eine wenig veränderte Exposition des Abschnittes 1.6 aus [1]. Bis auf explizit angegebene Zusätze sei die Notation dieselbe wie in den bisherigen Vorträgen.

Definition 1 (Das Kalkül $\mid\!\sim$)**.** Die logische Signatur bestehe aus $\wedge, \neg$. Nach wie vor sei $\alpha \to \beta := \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ und man definiere die folgenden Formelmengen:

$$
\begin{aligned}
\Lambda 1 &:= \big\{(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \,\big|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}\big\} \\
\Lambda 2 &:= \big\{\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta \,\big|\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}\big\} \\
\Lambda 3 &:= \big\{(\alpha \wedge \beta \to \alpha), (\alpha \wedge \beta \to \beta) \,\big|\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}\big\} \\
\Lambda 4 &:= \big\{(\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha) \,\big|\, \alpha, \beta \in \mathcal{F}\big\}
\end{aligned}
$$

Die Vereinigung $\Lambda := \bigcup_{i=1}^{4} \Lambda_i$ wird das *logische Axiomensystem des Kalküls* $\mid\!\sim$ genannt. Man bemerke, dass sämtliche Elemente von Λ Tautologien sind. Für eine Formel $\alpha \in \mathcal{F}$ und eine Formelmenge $X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ sei ein *Beweis für α aus X (im Kalkül $\mid\!\sim$)* ein Tupel $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{F}^{n+1}$ mit den Eigenschaften

- $\forall k \in \{0, \ldots, n\} : (\varphi_k \in X \cup \Lambda \text{ oder } \exists i, j < k : \varphi_i = \varphi_j \to \varphi_k)$
- $\varphi_n = \alpha$.

Falls ein Beweis für α aus X (im Kalkül $\mid\!\sim$) existiert, schreiben wir $X \mid\!\sim \alpha$ und sagen *α ist aus X beweisbar*. Wir nennen $\mid\!\sim$ *Hilbert-Kalkül.*

Bemerkung 2. Wir können $\mid\!\sim$ auch direkt als die kleinste Menge $\mid\!\sim \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ mit den Eigenschaften

- $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})\ \forall \alpha \in \mathcal{F} : (\alpha \in X \implies (X, \alpha) \in \mid\!\sim)$
- $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})\ \forall \gamma \in \Lambda : (X, \gamma) \in \mid\!\sim$
- $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{F} : ((X, \alpha), (X, \alpha \to \beta) \in \mid\!\sim \implies (X, \beta) \in \mid\!\sim)$

definieren, wobei wir $X \mid\!\sim \alpha$ schreiben falls $(X, \alpha) \in \mid\!\sim$. Ähnlich kann $\vdash$ als kleinste Untermenge von $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ mit den Eigenschaften (AR), (MR), ($\wedge$1), ($\wedge$2), ($\neg$1) und ($\neg$2) aufgefasst werden; auch die Menge aller Formeln wurde analog definiert. Diese Tatsache erlaubt es uns jeweils Induktionsargumente zu führen. Wir werden einen entsprechenden Induktionssatz auch für $\mid\!\sim$ sehen.

Beispiel 3. Ein möglicher Beweis für $\alpha \wedge \beta$ aus $\{\alpha, \beta\}$ ist

$$(\alpha, \beta, \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta, \beta \to \alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta).$$

Beispiel 4. Da Beweise von α und $\alpha \to \beta$ zu einem Beweis von β zusammengesetzt werden können, haben wir

$$X \mid\!\sim \alpha, \alpha \to \beta \implies X \mid\!\sim \beta.$$

Bemerkung 5. Wir können die Definition von $\mid\!\sim$ auch in der Terminologie der ursprünglichen Definition vom Kalkül $\vdash$ formulieren. So kann mann $\mid\!\sim$ auffassen als Gentzen-Kalkül mit den Regeln

$$\frac{}{X \mid\!\sim \alpha} \quad (\alpha \in X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})) \quad , \quad \frac{}{X \mid\!\sim \gamma} \quad (\gamma \in \Lambda) \quad , \quad \frac{X \mid\!\sim \alpha \mid X \mid\!\sim \alpha \to \beta}{X \mid\!\sim \beta}.$$

Die dritte (Schluss-)Regel wird *Modus Ponens* genannt und wir werden häufig bei Beweisen im Kalkül $\mid\!\sim$ sagen eine Formel folge aus zwei vorherigen durch Modus Ponens (MP). Aus dieser Sichtweise sei bemerkt, dass eine besondere Eigenschaft von $\mid\!\sim$ gegenüber $\vdash$ die Präsenz einer grossen Menge an Anfangsregeln und einer verhältnismässig kleinen Menge an Schlussregeln ist. Im Fall von $\mid\!\sim$ haben wir nur eine Schlussregel. Eine Motivation hinter solch einer Strukturierung ist die Tatsache, dass wir auf der höchsten Metaebene nur Modus Ponens für das Erlangen von neuem Wissen verwenden. Jedoch befinden wir uns hier im Bereich der Philosophie und es wird gewiss auch andere Sichtweisen geben. Ein weiterer Grund für die Einführung vom Hilbert-Kalkül ist rein technischer Natur: Herleitungen in $\vdash$ sind endliche Folgen von *Paaren* $(X, \alpha) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ und Beweise in $\mid\!\sim$ sind endliche Folgen von *Formeln*. Dies mag unschuldig aussehen, doch stellt es sich als sehr nützlich heraus bei der Gödelisierung von Beweisen.

Bemerkung 6. Da ein Beweis in $\mid\!\sim$ nur endlich viele Formeln enthält, gilt offensichtlich ein Analogon des Endlichkeitssatzes für $\vdash$ auch für $\mid\!\sim$. Offenkundig ist auch die Monotonieeigenschaft von $\mid\!\sim$:

$$X' \supseteq X \mid\!\sim \alpha \implies X' \mid\!\sim \alpha.$$

Der folgende Satz erspart uns in Zukunft Eigenschaften von Formeln α mit $X \mid\!\sim \alpha$ jedesmal induktiv über die Länge eines Beweises für α aus X nachzuweisen.

Satz 7 (Induktionssatz für $\mid\!\sim$)**.** *Sei X gegeben und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Formeln mit*

(E1) $\forall \alpha \in X \cup \Lambda : \mathcal{E}\alpha$

(E2) $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{F} : (\mathcal{E}\alpha, \mathcal{E}(\alpha \to \beta) \implies \mathcal{E}\beta)$

Dann gilt $\mathcal{E}\alpha$ für alle α mit $X \mid\!\sim \alpha$.

Beweis. Wir beweisen mittels Induktion über die Länge n eines Beweises Φ von α aus X. Falls $n = 1$ so ist $\alpha \in X \cup \Lambda$ und damit $\mathcal{E}\alpha$ nach (E1). Nehme also an $n > 1$ und $\mathcal{E}\varphi$ gilt für alle Formeln φ mit Beweisen einer Länger kleiner n aus X. Ist $\alpha \in X \cup \Lambda$ so befinden wir uns im vorherigen Fall; sei also $\alpha \notin X \cup \Lambda$. Dann aber enthält Φ Glieder β und $\beta \to \alpha$ mit Beweisen einer Länge kleiner n, denn jeder Anfang eines Beweises ist ein Beweis. Es gelten also $\mathcal{E}\beta$ und $\mathcal{E}(\beta \to \alpha)$ nach Induktionsannahme und somit $\mathcal{E}\alpha$ nach (E2). $\square$

Eine einfache Anwendung von Satz 7 ist das folgende Korollar:

Korollar 8 (Korrektheit von $\mid\!\sim$)**.** *Für alle $X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ und $\alpha \in \mathcal{F}$ gilt:*

$$X \mid\!\sim \alpha \implies X \vDash \alpha.$$

Insbesondere sind alle aus Λ in $\mid\!\sim$ beweisbaren Formeln Tautologien.

Beweis. Sei $\mathcal{E}\alpha$ die Eigenschaft '$X \vDash \alpha$' für fixes X. Wende nun Satz 7 an. $\square$

Unser Ziel ist es nun die Vollständigkeit von $\mid\!\sim$ zu zeigen. Hier wird eine weitere Eigenart vom Hilbert-Kalkül zum Vorschein kommen: es werden viele eher technische Ableitungen von Regeln nötig sein um es erst einmal zum Laufen zu bringen. Dies ist nicht weiter überraschend wenn die grosse Menge an Anfangsregeln und die kleine Menge an Schlussregeln beachtet wird. Wie üblich stehe $\mid\!\sim \alpha$ für $\varnothing \mid\!\sim \alpha$.

Lemma 9. *Für alle $X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ und $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ gilt:*

1. $X \mid\!\sim \alpha \to \neg\beta \implies X \mid\!\sim \beta \to \neg\alpha$
2. $\mid\!\sim \alpha \to \beta \to \alpha$
3. $\mid\!\sim \alpha \to \alpha$
4. $\mid\!\sim \alpha \to \neg\neg\alpha$
5. $\mid\!\sim \beta \to \neg\beta \to \alpha$

Beweis.

1.

$X \mid\!\sim (\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \neg\alpha)$	(Λ4)
$X \mid\!\sim \alpha \to \neg\beta$	(Annahme)
$X \mid\!\sim \beta \to \neg\alpha$	(MP)

2.

$\mid\!\sim \beta \wedge \neg\alpha \to \neg\alpha$	(Λ3)
$\mid\!\sim \alpha \to \neg(\beta \wedge \neg\alpha) = \alpha \to \beta \to \alpha$	(1.)

3. $\mathrel{|\!\sim} (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \quad (\Lambda 1)$
$\mathrel{|\!\sim} \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha \quad (2.)$
$\mathrel{|\!\sim} (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \quad (\mathrm{MP})$
$\mathrel{|\!\sim} \alpha \to \alpha \to \alpha \quad (2.)$
$\mathrel{|\!\sim} \alpha \to \alpha \quad (\mathrm{MP})$

4. $\mathrel{|\!\sim} \neg\alpha \to \neg\alpha \quad (3.)$
$\mathrel{|\!\sim} \alpha \to \neg\neg\alpha \quad (1.)$

5. $\mathrel{|\!\sim} \neg\beta \wedge \neg\alpha \to \neg\beta \quad (\Lambda 3)$
$\mathrel{|\!\sim} \beta \to \neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha) = \beta \to \neg\beta \to \alpha \quad (1.)$

□

Teil 5 dieses Lemmas ergibt sofort, dass $\mathrel{|\!\sim}$ die Regel $(\neg 1)$ von $\vdash$ erfüllt, also

$$X \mathrel{|\!\sim} \beta, \neg\beta \implies X \mathrel{|\!\sim} \alpha.$$

Wegen $\Lambda 2, \Lambda 3$ erfüllt $\mathrel{|\!\sim}$ sicher auch $(\wedge 1)$ und $(\wedge 2)$. Wir beweisen nach Abschluss einiger Vorbereitungen auch die Regel $(\neg 2)$ für $\mathrel{|\!\sim}$ und erhalten danach leicht das gewünschte Vollständigkeitsresultat.

Proposition 10 (Deduktionstheorem)**.** *Für alle $X \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ und $\alpha, \gamma \in \mathcal{F}$ gilt:*

$$X, \alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma \implies X \mathrel{|\!\sim} \alpha \to \gamma.$$

Beweis. Wir benützen den Induktionssatz für $\mathrel{|\!\sim}$. Es bedeute $\mathcal{E}\gamma$ jetzt '$X \mathrel{|\!\sim} \alpha \to \gamma$'. Zum Nachweis von (E1) sei $\gamma \in X \cup \{\alpha\} \cup \Lambda$. Ist $\gamma = \alpha$, gilt $X \mathrel{|\!\sim} \alpha \to \gamma$ nach Teil 3 von Lemma 9. Ist $\gamma \in X \cup \Lambda$, so gilt sicher $X \mathrel{|\!\sim} \gamma$. Weil auch $X \mathrel{|\!\sim} \gamma \to \alpha \to \gamma$ nach Teil 2 von Lemma 9, folgt $X \mathrel{|\!\sim} \alpha \to \gamma$ mit MP. Zum Nachweis von (E2) seien β und γ, so dass $X \mathrel{|\!\sim} \alpha \to \beta, \alpha \to \beta \to \gamma$ nach Induktionsannahme. Zweimalige Anwendung von MP auf die Tautologie $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \in \Lambda 1$ ergibt offenbar $X \mathrel{|\!\sim} \alpha \to \gamma$. Damit ist (E2) bestätigt und die Proposition bewiesen. □

Lemma 11. *Für alle $\alpha \in \mathcal{F}$ gilt: $\mathrel{|\!\sim} \neg\neg\alpha \to \alpha$.*

Beweis. Sei $\tau \in \Lambda$. Dann gilt:

$\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha \mathrel{|\!\sim} \neg\alpha, \neg\neg\alpha \quad (\Lambda 3$ und MP$)$
$\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha \mathrel{|\!\sim} \neg\tau \quad (\neg 1)$
$\mathrel{|\!\sim} \neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha \to \neg\tau \quad$ (Proposition 10)
$\mathrel{|\!\sim} \tau \to \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha) \quad$ (Teil 1 von Lemma 9)
$\mathrel{|\!\sim} \neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha) = \neg\neg\alpha \to \alpha \quad$ (MP)

□

Lemma 12. *Das Kalkül* $\mid\!\sim$ *erfüllt die Regel* $(\neg 2)$*, d.h. wenn* $X, \beta \mid\!\sim \alpha$ *und* $X, \neg\beta \mid\!\sim \alpha$*, so* $X \mid\!\sim \alpha$*.*

Beweis. Sei $\tau \in \Lambda$. Dann gilt:

$X, \beta \mid\!\sim \alpha$ und $X, \neg\beta \mid\!\sim \alpha$	(Annahme)
$X, \beta \mid\!\sim \neg\neg\alpha$ und $X, \neg\beta \mid\!\sim \neg\neg\alpha$	(MP und Teil 4 von Lemma 9)
$X \mid\!\sim \beta \to \neg\neg\alpha, \neg\beta \to \neg\neg\alpha$	(Proposition 10)
$X \mid\!\sim \neg\alpha \to \neg\beta$ und $X \mid\!\sim \neg\alpha \to \neg\neg\beta$	(Teil 1 von Lemma 9)
$X, \neg\alpha \mid\!\sim \neg\beta, \neg\neg\beta$	(Monotonieeigenschaft und MP)
$X, \neg\alpha \mid\!\sim \neg\tau$	$(\neg 1)$
$X \mid\!\sim \neg\alpha \to \neg\tau$	(Proposition 10)
$X \mid\!\sim \tau \to \neg\neg\alpha$	(Teil 1 von Lemma 9)
$X \mid\!\sim \neg\neg\alpha$	(MP)
$X \mid\!\sim \alpha$	(Lemma 11 und MP)

□

Satz 13 (Vollständigkeitssatz)**.** *Das Kalkül* $\mid\!\sim$ *ist gleich der Folgerungsrelation* $\vDash$*.*

Beweis. Nach Korollar 8 gilt $\mid\!\sim \subseteq \vDash$. Weil $\mid\!\sim$ alle Basisregeln von $\vdash$ erfüllt, ist $\vdash \subseteq \mid\!\sim$. Nach dem Vollständigkeitssatz für $\vdash$ sind $\vdash$ und $\vDash$ identisch, also $\vDash \subseteq \mid\!\sim$. □

Insbesondere gilt also $\mid\!\sim \alpha \iff \vDash \alpha$, d.h. genau die 2-wertigen Tautologien lassen sich mittels MP aus dem Axiomensystem Λ gewinnen.

Es soll angemerkt sein, dass man die Vollständigkeit von $\mid\!\sim$ auch ohne Rückgriff auf $\vdash$ beweisen kann. Hierzu bedarf es lediglich einer Anpassung der entsprechenden Lemmata, die für die Vollständigkeit von $\vdash$ verwendet werden.

Bemerkung 14. Es mag überraschend klingen, dass $\Lambda 1$-$\Lambda 4$ bereits ausreichen, um alle aussagenlogischen Tautologien zu gewinnen. Dass Λ hier dennoch alle Tautologien abzuleiten gestattet, liegt daran, dass $\to$ *definiert* wurde. Würde man $\to$ als eigenständigen Junktor betrachten, wäre dies nicht mehr der Fall. Um dies einzusehen, ändere man die Interpretation von $\neg$ durch die Erklärung $\neg 0 = \neg 1 = 1$. Auch dann erhalten alle Axiome von Λ bei jeder Belegung den Wert 1, ebenso wie auch alle aus Λ mit MP herleitbaren Formeln, nicht jedoch z.B. die Formel $\neg\neg p \to p$, die anders als in Lemma 11 behauptet, dann nicht herleitbar sein kann.

Literatur

[1] W. Rautenberg. *Einführung in die Mathematische Logik.* Vieweg-Teubner, 2008.