Seminar Mathematische Logik
L-Strukturen und Syntax der Prädikatenlogik

Linda Raabe

7. März 2012

1 L-Strukturen

Definition 1.1 (Struktur)
Eine *Struktur* $\mathcal{A}$ ist eine nichtleere *Trägermenge* A zusammen mit Relationen, Operationen und Konstanten (ausgezeichnete Elemente von A). $\mathcal{A}$ heisst endlich (beziehungsweise unendlich), falls A endlich (beziehungsweise unendlich) ist. Wir schreiben zum Beispiel $\mathcal{A} = (A, +, <, 0)$.

Bemerkung 1.2
Konstanten können wir sowohl als 0-stellige Operationen, als auch als Elemente von A auffassen.

Bemerkung 1.3
Falls $\mathcal{A}$ keine Operationen oder Konstanten enthält, heisst $\mathcal{A}$ auch eine Relationalstruktur. Falls $\mathcal{A}$ keine Relationen enthält, heisst $\mathcal{A}$ algebraische Struktur oder Algebra.

Wir betrachten oft ganze Klassen von Strukturen, die gewisse Eigenschaften teilen. Wir schreiben dann $\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, <^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$ und nennen $L = \{+, <, 0\}$ die *nichtlogische Signatur*.

Notation
Es bezeichne $r \in L$ stets ein Relationszeichen mit der Stellenzahl n und $f \in L$ bezeichne stets ein Operationszeichen mit der Stellenzahl n. Es sei $c \in L$ stets eine Konstante. Weiter bezeichne A, beziehungsweise B stets den Träger der mit $\mathcal{A}$, beziehungsweise $\mathcal{B}$ bezeichneten Struktur.

Definition 1.4 (L-Struktur)
Eine *L-Struktur* ist ein Paar $\mathcal{A} = (A, L^{\mathcal{A}})$, wobei $L^{\mathcal{A}}$ für jedes $r \in L$ eine Relation $r^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ mit der Stellenzahl von r enthält, für jedes $f \in L$ eine Operation $f^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ mit der Stellenzahl von f enthält und für jedes $c \in L$ eine Konstante $c^{\mathcal{A}}$ in A enthält.

Wir werden später die zu L gehörige Sprache $\mathcal{L}$ definieren und von da an meistens $\mathcal{L}$-Strukturen statt L-Strukturen schreiben.

Definition 1.5 (f-abgeschlossen)
Ist $A \subset B$ und f eine n-stellige Operation auf B, heisst A *abgeschlossen* bezüglich f oder f*-abgeschlossen*, wenn aus $\vec{a} \in A^n$ stets $f\vec{a} \in A$ folgt.

Bemerkung 1.6
Für ein nichtleeres System f-abgeschlossener Teilmengen von B ist auch dessen Durchschnitt wieder f-abgeschlossen. Daher können wir auch von der kleinsten aller f - abgeschlossenen Teilmengen von B reden, die eine Teilmenge $E \subset B$ enthält.

Definition 1.7 (Einschränkung)
Die *Einschränkung* einer n-stelligen Relation $R \subset B^n$ auf eine Teilmenge $A \subset B$ sei $R \cap A^n$. Wir definieren die *Einschränkung* $f^{\mathcal{A}}$ auf f-abgeschlossenen Teilmengen $A \subset B$ wie folgt: $f^{\mathcal{A}}\vec{a} = f\vec{a}$ für $\vec{a} \in \mathcal{A}^n$.

Definition 1.8 (Substruktur, Erweiterung)
Sei $\mathcal{B}$ eine L-Struktur, $A \subset B$ nichtleer und gegenüber allen Operationen von $\mathcal{B}$ abgeschlossen. Sei $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ die Menge aller Einschränkungen $r^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}$, wobei $r, f \in L$. Dann ist $\mathcal{A} = (A, L^{\mathcal{A}})$ eine L-Struktur und heisst *Substruktur* von $\mathcal{B}$. Wir nennen $\mathcal{B}$ eine *Erweiterung* von $\mathcal{A}$ und wir schreiben $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Definition 1.9
Für eine nichtleere Teilmenge $E \subset B$ können wir die kleinste E enthaltende Substruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ definieren. Dabei bedeutet E enthaltend, dass $E \subset A$. Wir nennen $\mathcal{A}$ die von E in $\mathcal{B}$ erzeugte *Substruktur*. Weiter heisst $\mathcal{A}$ endlich erzeugt, wenn $\mathcal{A}$ von einem endlichen E in $\mathcal{A}$ erzeugt wird.

Definition 1.10 (Redukt und Expansion)
Ist $\mathcal{A}$ eine L-Struktur und $L_0 \subset L$, so heisst die L_0-Struktur $\mathcal{A}_0 := (A, L_0)$ das L_0*-Redukt* von $\mathcal{A}$. Wir schreiben für $\zeta^{\mathcal{A}}$ auch $\zeta^{\mathcal{A}_0}$. Wir nennen $\mathcal{A}$ eine L*-Expansion* von $\mathcal{A}_0$.

Bei Relationen wollen wir statt $(a, b) \in R$, beziehungsweise $(a, b) \notin R$ vereinfacht $a \lhd b$, beziehungsweise $a \ntriangleleft b$ schreiben. Für $(a, b), (b, c) \in R$ schreiben wir $a \lhd b \lhd c$. Wir nennen $\lhd$:

- *reflexiv*, falls für alle $a \in A$ gilt: $a \lhd a$,
- *irreflexiv*, falls für alle $a \in A$ gilt: $a \ntriangleleft a$,
- *symmetrisch*, falls für alle $a, b \in A$ gilt: $a \lhd b \Rightarrow b \lhd a$,

- *antisymmetrisch*, falls für alle $a, b \in A$ gilt: $a \lhd b \lhd a \Rightarrow a = b$,
- *transitiv*, falls für alle $a, b, c \in A$ gilt: $a \lhd b \lhd c \Rightarrow a \lhd c$,
- *konnex*, falls für alle $a, b \in A$ gilt: $a \lhd b$ oder $b \lhd a$ oder $a = b$.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heisst *Äquivalenzrelation*.

Definition 1.11 (Homomorphismus)
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-Strukturen und $h : A \to B$ (wir schreiben dann auch $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) eine Abbildung so, dass für alle $r, f, c \in L$ (f und r beide mit Stellenzahl n) und $\vec{a} \in A^n$ gilt:

- (H1) $hf^{\mathcal{A}}\vec{a} = f^{\mathcal{B}}h\vec{a}$
- (H2) $hc^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{B}}$
- (H3) $r^{\mathcal{A}}\vec{a} \Rightarrow r^{\mathcal{B}}h\vec{a}$.

Dann heisst h *Homomorphismus*. Gilt zusätzlich noch

- (S) $r^{\mathcal{B}}h\vec{a} \Rightarrow (\exists \vec{b} \in A^n)(h\vec{a} = h\vec{b}$ und $r^{\mathcal{A}}\vec{b})$,

so heisst h *strenger Homomorphismus*. Ein injektiver strenger Homomorphismus heisst *Einbettung* oder *Monomorphismus*. Ist h bijektiv, so heisst h *Isomorphismus* und im Falle von $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ heisst h *Automorphismus*. Falls es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gibt, sagen wir $\mathcal{A}$ ist *isomorph* zu $\mathcal{B}$ und schreiben $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Beispiele 1.12

- Algebren $\mathcal{A} = (A, \circ)$ mit einer beliebigen Operation $\circ : A^2 \to A$ heissen *Gruppoide*. Ist $\circ$ assoziativ, so heisst $\mathcal{A}$ eine *Halbgruppe*. Sind zudem die Abbildungen $a \mapsto (a \circ y)$ und $b \mapsto (x, b)$ für alle $x, y \in A$ bijektiv, so ist $\mathcal{A}$ eine Gruppe und man kann beweisen, dass es ein eindeutiges neutrales Element e gibt. Ist $\circ$ kommutativ, so ist $\mathcal{A}$ eine *abelsche Gruppe*. In allen Fällen ist $\mathcal{A} = (A, \circ)$ eine Struktur. Man kann auch das neutrale Element als Konstante explizit dazu nehmen und bekommt die Struktur $\mathcal{A} = (A, \circ, e)$

- Mit $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, ...\}$ als Trägermenge können wir die Strukturen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ betrachten. Erstere ist eine Substruktur von $(\mathbb{Z}, +)$, zweitere ist Substruktur von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ mit $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Im Allgemeinen sind Substrukturen von Halbgruppen wieder Halbgruppen und Substrukturen von Gruppen sind (leider auch nur) Halbgruppen. Nimmt man stattdessen als Signatur die Menge $\{\circ, ^{-1}, e\}$ ist jede Substruktur einer Gruppe selbst wieder eine Gruppe.

- Sei B die Menge der Zeichenfolgen aus den Buchstaben eines Alphabets A und $\circ$ die Verkettung von Wörtern. Dann ist $\mathcal{B} = (B, \circ)$ die *von A erzeugte Worthalbgruppe* eine Struktur.

2 Syntax der Prädikatenlogik

Definition 2.1 (Alphabet)
Das *Alphabet* $\mathcal{L}$ einer Signatur L bezeichnet die Menge der Grundzeichen einer Sprache der 1. Stufe. Dazu gehören:

- abzählbar viele Variablen $v_1, v_2, ...$ (vorzugsweise mit x, y, z, u, v zu bezeichnen)
- die logischen Symbole $\wedge, \neg, \forall, =, (,)$
- die Symbole von L.

Später kommen noch weitere Symbole dazu, wie zum Beispiel $\exists$ (es existiert) und $\exists!$ (es existiert genau ein). Es bezeichne $S_{\mathcal{L}}$ die Menge aller Zeichenfolgen aus den Grundsymbolen von $\mathcal{L}$.

Wir möchten jedoch nur sinnvolle Zeichenfolgen aus $S_{\mathcal{L}}$ betrachten, welche wir nach folgenden Regeln gewinnen.

Definition 2.2 (Term)

- (T1) Variablen und Konstanten sind Terme (*Primterme*).
- (T2) Sind $f \in L$ und $t_1, ..., t_n$ Terme, so ist auch $ft_1...t_n$ ein Term.

Es bezeichne $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ die Menge aller Terme bei gegebener Signatur L.

Bemerkung 2.3
Variablenfreie Terme heissen *Grundterme*. Terme, die keine Primterme sind, heissen *Funktionsterme*.

Satz 2.4 (Beweisprinzip durch Terminduktion)
Sei ε eine Eigenschaft auf $\S_L$, die auf alle Primterme zutrifft und gelte

$$\varepsilon t_1, ..., \varepsilon t_n \Rightarrow \varepsilon f t_1...t_n \text{ für jedes } f \in L \text{ der Stellenzahl } n \text{ und alle } t_i \in \mathcal{T}. \tag{1}$$

Dann haben alle Terme die Eigenschaft ε.

Beweis. Wir wissen dass $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ die kleinste Menge ist, die alle Primterme enthält und folgende Eigenschaft hat: $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \Rightarrow ft_1...t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$. Da die Menge der Zeichenfolgen, auf die die Eigenschaft ε zutrifft, die gleichen Eigenschaften hat, muss sie die Menge der Terme enthalten.

Definition 2.5 (Formeln)

- (F1) Sind s, t Terme, so ist $s \equiv t$ eine Formel (*Primformeln*).
- (F2) Sind $t_1, ..., t_n$ Terme und $r \in L$, so ist $rt_1, ...t_n$ eine Formel.
- (F3) Sind α, β Formeln und x eine Variable, so sind auch $(\alpha \wedge \beta), \neg\alpha$ und $\forall x\alpha$ Formeln.

Nur die oben beschriebenen Ausdrücke sind Formeln. Ab jetzt sollen φ, α, β stets Formeln und x, y stets Variablen bezeichnen.

Definition 2.6 (Variablenmenge, Subterm)
Sei t ein Term. Wir definieren var t als die *Variablenmenge* der in t vorkommenden Variablen wie folgt:

- var $c = \emptyset$
- var $x = \{x\}$
- var $ft_1...t_n =$ var $t_1 \cup ... \cup$ var t_n

Für Formeln definieren wir die Variablenmenge wie folgt:

- var $(s \equiv t) =$ var $s \cup$ var t,
- var $rt_1...t_n =$ var $t_1 \cup ... \cup$ var t_n,
- var $(\alpha \wedge \beta) =$ var $\alpha \cup$ var β,
- var $\neg\alpha =$ var α,
- var $\forall x\alpha =$ var $\alpha \cup \{x\}$.

Ein Term t heisst *Subterm* einer Zeichenfolge ξ, falls es Zeichenfolgen ξ_1 und ξ_2 so gibt, dass $\xi = \xi_1 t \xi_2$. Für Formeln definieren wir die Variablenmenge analog.

Notation

- $\exists x\alpha := \neg\forall x\neg\alpha$
- $\alpha \vee \beta := \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\alpha \rightarrow \beta := \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Formeln der Gestalt $s \equiv t$ heissen *Gleichungen*. Primformeln und deren Negationen heissen *Literale*. Formeln, in denen $\forall$ und $\exists$ nicht vorkommen, heissen *quantorenfreie* oder *offene Formeln*. Allgemein seien die *Booleschen Kombinationen* der Formeln aus einer gegebenen Formelmenge X alle diejenigen Formeln, die sich mittels $\wedge, \neg$ (und damit auch $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) aus den Formeln von X erzeugen lassen. Zeichenfolgen der Gestalt $\forall x, \exists x$ heissen Präfixe.
Wir bezeichnen die Menge aller Formeln in L mit $\mathcal{L}$. Für einelementige $L = \{\in\}$ schreiben wir $\mathcal{L}_{\{\in\}}$ und analog für andere einelementige L. Wir definieren mit $L = \emptyset$ die *Sprache der reinen Identität* $\mathcal{L}_{\equiv}$.
Wir können für bessere Lesbarkeit unterschiedlich gestaltete Klammerpaare oder verbale Beschreibungen zulassen, solange die gemeinte Formel eindeutig erkennbar ist.

Satz 2.7 (Beweisprinzip durch Formelinduktion)
Sei ε eine Eigenschaft auf S_L, die auf alle Primformeln zutrifft und gelte:

- *Sind $t_1, ..., t_n$ Terme und $r \in L$, so hat $rt_1...t_n$ die Eigenschaft ε.*
- *Sind α, β Formeln mit der Eigenschaft ε und x eine beliebige Variable, so haben auch $(\alpha \wedge \beta), \neg\alpha$ und $\forall x\alpha$ die Eigenschaft ε.*

Dann gilt ε für alle Formeln.

Beweis. Analog zur Terminduktion.

Definition 2.8
Wir definieren die *gebundenen* Variablen in φ als

$$gbd\varphi := \{x \in var\varphi | \varphi \text{ enthält das Präfix } \forall x\}. \tag{2}$$

In Subformeln von φ der Gestalt $\forall x\beta$ heisst β auch der *Wirkungsbereich* von $\forall x$. Wir definieren die *freien* Variablen in φ wie folgt:

- $\text{frei}\alpha = \text{var}\alpha$ für Primformeln α,
- $\text{frei}(\alpha \wedge \beta) = \text{frei}\alpha \cup \text{frei}\beta$,
- $\text{frei}\neg\alpha = \text{frei}\alpha$,
- $\text{frei}\forall x\alpha = \text{frei}\alpha \backslash \{x\}$.

Formeln ohne freie Variablen heissen *Aussagen* oder *geschlossene Formeln*. Es bezeichne $\mathcal{L}^0$ die Menge aller Aussagen in $\mathcal{L}$. Allgemein bezeichne $\mathcal{L}^n$ die Menge aller Formeln $\varphi \in \mathcal{L}$ mit $\text{frei}\varphi \subset \{v_0, ..., v_{n-1}\}$.

Notation
$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ bedeutet frei$\varphi \subset \{x_1, ..., x_n\}$. Bei Termen bezeichnet die Menge der freien Variablen die komplette Variablenmenge.

Definition 2.9 (Substitution)
Wir definieren $\varphi\frac{t}{x}$ (gesprochen φ t für x) als diejenige Zeichenfolge sein, welche durch Ersetzung der Variable x an allen Stellen ihres freien Vorkommens in der Formel φ durch den Term t entsteht. Genauer definieren wir eine Substitution $\frac{t}{x}$ rekursiv für alle Terme und Formeln wie folgt: Sei $t_i' := t_i\frac{t}{x}$, dann gilt:

- $x\frac{t}{x} = t$
- $y\frac{t}{x} = y$ (für $x \neq y$)
- $c\frac{t}{x} = c$
- $(ft_1...t_n)\frac{t}{x} = ft_1'...t_n'$
- $(t_1 = t_2)\frac{t}{x} = t_1' = t_2'$
- $(\neg\alpha)\frac{t}{x} = \neg(\alpha\frac{t}{x})$
- $(\alpha \wedge \beta)\frac{t}{x} = \alpha\frac{t}{x} \wedge \beta\frac{t}{x}$
- $(rt_1...t_n)\frac{t}{x} = rt_1'...t_n'$
- $(\forall y\alpha)\frac{t}{x} = \begin{cases} \forall y\alpha, & \text{wenn } x = y \\ \forall y(\alpha\frac{t}{x}), & \text{sonst.} \end{cases}$

Analog können wir simultane Substitutionen definieren: $\varphi\frac{t_1...t_n}{x_1...x_n}$. Hierbei sollen gleichzeitig alle t_i jeweils durch x_i ersetzt werden. Wir müssen dabei beachten, dass zwar $\varphi\frac{t_1t_2}{x_1x_2} = \varphi\frac{t_2t_1}{x_2x_1}$, aber $\varphi\frac{t_1}{x_1}\frac{t_2}{x_2} \neq \varphi\frac{t_2}{x_2}\frac{t_1}{x_1}$.
Etwas allgemeiner können wir globale Substitutionen σ betrachten. Dabei ordnet σ jeder Variable x einen Term $x^\sigma \in \mathcal{T}$ zu und wird auf natürliche Weise auf ganz $\mathcal{L}$ fortgesetzt:

- $c^\sigma = c$
- $(ft_1...t_n)^\sigma = ft_1^\sigma...t_n^\sigma$
- $(t_1 = t_2)^\sigma = t_1^\sigma = t_2^\sigma$
- $(rt_1...t_n)^\sigma = rt_1^\sigma...t_n^\sigma$
- $(\alpha \wedge \beta)^\sigma = \alpha^\sigma \wedge \beta^\sigma$

- $(\neg\alpha)^\sigma = \neg\alpha^\sigma$
- $(\forall x\varphi)^\sigma = \forall x\varphi^{\sigma'}$, wobei $x^{\sigma'} = x$ und $y^{\sigma'} = y^\sigma$ für $y \neq x$

Für Zeichenfolgen ohne $\forall$ wird einfach jedes x durch x^σ ersetzt. Es bezeichne ι die identische Substitution, die jede Zeichenfolge unverändert lässt. Dadurch bilden die globalen Substitutionen mit $\varphi^{\sigma_1\sigma_2} = (\varphi^{\sigma_1})^{\sigma_2}$ eine Halbgruppe mit neutralem Element ι.

Literatur

[R] W. Rautenberg, *Einführung in die Mathematische Logik*, Vieweg-Teubner 2008, 3., überarbeitete Auflage.