Seminar über mathematische Logik
Semantik elementarer Sprachen

Tobias Sodoge

7. und 14. 3. 2012

Die folgenden Ausführungen über die Semantik elementarer Sprachen sind eine geringfügig veränderte Exposition des Abschnitts 2.3 aus [1]. Wenn nicht anders vermerkt entspricht die Notation derjenigen der vorangegangenen Vorträge.

Definition 1 (Modell)**.** Ein *Modell* $\mathcal{M}$ sei ein Paar $(\mathcal{A}, w)$ bestehend aus

(i) einer $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$.

(ii) einer Belegung $w : Var \longrightarrow A,\ \ x \mapsto x^w$.

Man bezeichnet $r^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}$ und x^w auch mit $r^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}$ und $x^{\mathcal{M}}$. Der Träger von $\mathcal{A}$ wird auch Träger von $\mathcal{M}$ genannt.

Ein so definiertes Modell $\mathcal{M}$ weist jedem Term t einen Wert aus A zu, der mit $t^{\mathcal{M}}$ oder t^w bezeichnet wird. Für Primterme ist dieser Wert durch w festgelegt. Für die übrigen Terme definieren wir:

$$(ft_1 \cdots t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$$

Durch Terminduktion ergibt sich nun, dass $t^{\mathcal{M}}$ nur von den in t vorkommenden Symbolen abhängt. In diesem Sinne ist $t^{\mathcal{M}}$ wohldefiniert, denn für zwei Modelle $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ die auf allen in t vorkommenden Variablen und Symbolen überseinstimmen gilt $t^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}'}$. Für $t = (t_1, ..., t_n)$ schreiben wir $\vec{t}^{\mathcal{M}}$ für $(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$.
Manchmal ist es von Nutzen ein Modell zu betrachten bei dem einer bestimmten Variablen x aus der Variablenmenge ein fixer Wert a aus A zugewiesen wird. Wir definieren dazu zunächst:

$$w_x^a(y) = \begin{cases} y^w, & \text{falls } y \neq x \\ a, & \text{falls } y = x \end{cases}$$

und setzen $\mathcal{M}_x^a := (\mathcal{A}, w_x^a)$, d.h. $\mathcal{M}_x^a$ unterscheidet sich von $\mathcal{M}$ nur auf der Variablen x. Diese Konstruktion lässt sich für $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ und $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ verallgemeinern. Wir definieren

$$M_{\vec{x}}^{\vec{a}} := (...((M_{x_1}^{a_1})_{x_2}^{a_2})...)_{x_n}^{a_n}. \tag{1}$$

Nun können wir eine Erfüllungsrelation zwischen Modellen und Formeln definieren (zum Vergleich siehe Bemerkung 3.2 aus Vortrag 1).

Definition 2 (Erfüllungsrelation)**.** Wir definieren die *Erfüllungsrelation* $\models$ zwischen einem Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w)$ und einer Formel φ rekursiv über φ indem wir folgende Eigeschaften für $\models$ fordern:

(=) $\mathcal{M} \models s = t \;\Leftrightarrow\; s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$.

(r) $\mathcal{M} \models r\vec{t} \Leftrightarrow r^{\mathcal{M}}\vec{t}^{\mathcal{M}}$.

($\wedge$) $\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{M} \models \alpha$ und $\mathcal{M} \models \beta)$.

($\neg$) $\mathcal{M} \models \neg\alpha \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \not\models \alpha$.

($\forall$) $\mathcal{M} \models \forall x\ \alpha \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{M}_x^a \models \alpha$ für alle a in $A)$.

Gilt $\mathcal{M} \models \varphi$, so sagen wir *„$\mathcal{M}$ erfüllt φ"* oder *„ $\mathcal{M}$ ist ein Modell für φ"*.
Man schreibt auch $\mathcal{A} \models \varphi[w]$ für $\mathcal{M} \models \varphi$.
Wenn X eine Formelmenge ist und $\mathcal{M} \models \varphi$ für alle φ aus X gilt, schreiben wir $\mathcal{M} \models X$ und sagen *„$\mathcal{M}$ ist ein Modell für X"*.

Bemerkung 3. Da $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und $\exists$ im vorangegangenen Vortrag sinnentsprechend durch $\wedge$, $\neg$ und $\forall$ definiert wurden gelten auch:

($\vee$) $\mathcal{M} \models \alpha \vee \beta \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M} \models \alpha$ oder $\mathcal{M} \models \beta$.

($\rightarrow$) $\mathcal{M} \models (\alpha \rightarrow \beta) \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{M} \models \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \models \beta)$.

($\leftrightarrow$) $\mathcal{M} \models \alpha \leftrightarrow \beta \;\Leftrightarrow\; (\mathcal{M} \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \beta)$.

($\exists$) $\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{M}_x^a \models \varphi$ für ein gewisses $a \in A)$.

Schreiben wir $\forall\vec{x}$ für $\forall x_1 \cdots \forall x_n$ lässt sich mit Gleichung (1) folgende Verallgemeinerung von ($\forall$) formulieren:

$$\mathcal{M} \models \forall\vec{x}\varphi \Leftrightarrow M_{\vec{x}}^{\vec{a}} \text{ für alle } \vec{a} \in A^n. \tag{2}$$

Beispiel 4. *Falls $x \notin var\ t$, dann gilt $\mathcal{M} \models \exists x\ x = t$ für jedes Modell $\mathcal{M}$.*
Beweis:
Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell. Nach $(=)$ ist $x = t \Leftrightarrow x^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$.
Nach $(\exists)$ ist $\mathcal{M} \models \exists x\ x = t \Leftrightarrow \mathcal{M}^a_x \models x = t$ für ein gewisses $a \in A$. Offensichtlich erfüllt $a = t^{\mathcal{M}}$ diese Bedingung. Nach Voraussetzung ist $x \notin$ var(t). Für alle a in A gilt demnach $t^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}^a_x}$, also insbesondere für $a = t^{\mathcal{M}}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Voraussetzung $x \notin \text{var}(t)$ ist essentiell, da z.B. $\mathcal{M} \models \exists x\ x = fx$ nur dann erfüllt ist, wenn f mindestens einen Fixpunkt hat.

Definition 5 (Erfüllbarkeit, Tautologie, semantische Äquivalenz)**.** .

(i) Eine Formel φ heisst *erfüllbar*, wenn ein Modell $\mathcal{M}$ existiert, das φ erfüllt. Analog heisst eine Formelmenge X *erfüllbar* wenn ein Modell $\mathcal{M}$ für X existiert.

(ii) φ heisst allgemeingültig oder *Tautologie*, wenn jedes Modell φ erfüllt. Man schreibt $\models \varphi$.

(iii) α und β heissen *semantisch äquivalent*, $\alpha \equiv \beta$, wenn für jedes $\mathcal{L}$-Modell $\mathcal{M}$ gilt:
$$\mathcal{M} \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \beta.$$

Man sagt *„In $\mathcal{A}$ gilt φ“* und schreibt $\mathcal{A} \models \varphi$ wenn $(\mathcal{A}, w) \models \varphi$ für alle Belegungen w gilt. Analog schreibt man für eine Formelmenge X $\mathcal{A} \models X$, wenn $\mathcal{A} \models \varphi$ für alle φ aus Xgilt. Erfüllt jedes Modell von X auch die Formel ψ so schreibt man $X \models \psi$ und sagt *„Aus X folgt ψ“*.

Beispiel 6. *$\mathcal{A} \models \forall x \exists y\ x \neq y$ falls der Träger von $\mathcal{A}$ mindestens zwei Elemente hat.*
Beweis:
Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w)$ und $a \in A$. Nach Vorraussetzung existiert ein $b \neq a$. Also gilt $\mathcal{M}^{ab}_{xy} \models x \neq y$ nach $(=)$. Per Definition von $(\exists)$ folgt $\mathcal{M}^a_x \models \exists y\ x \neq y$. Da a beliebig war folgt $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w) \models \forall x \exists y\ y \neq x$ für jede Belegung w. Dies bedeutet per obiger Definition $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\ y \neq x$ und die Behauptung ist bewiesen.

Man stellt sich nun die Frage warum eine Unterscheidung von Modellen und Strukturen überhaupt nötig ist. Ein wichtiger Grund liegt darin, dass das sogenannte *„tertium non datur* “, d.h. es gilt entweder $\mathcal{M} \models \varphi$ oder $\mathcal{M} \not\models \varphi$, für Modelle gilt, jedoch für Strukturen im Allgemeinen nur für Aussagen zutrifft. Letzteres wird der aus dem Koinzidenzsatz folgen, den wir später beweisen. Wir betrachten zur Verdeutlichung dieser Tatsache zunächst

Beispiel 7. *Hat $\mathcal{A}$ mindestens zwei Elemente so gilt weder $\mathcal{A} \models x = y$ noch $\mathcal{A} \models x \neq y$*

Beweis:

Da A mindestens zwei Elemente hat, können wir sowohl eine Belegung w_1 mit $x^{w_1} \neq y^{w_1}$, als auch eine Belegung w_2 mit $x^{w_2} = y^{w_2}$ wählen. w_1 falsifiziert $\mathcal{A} \models x = y$ und analog w_2 $\mathcal{A} \models x \neq y$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiel 8 (elementare Gruppentheorie)**.** Wählen wir die Sprache 1. Stufe $\mathcal{L}\{\circ, e, \ ^{-1}\}$ kann dass „übliche“ Axiomensystem für Gruppen in Formeln und Aussagen in dieser Sprache formuliert werden. Man fordert

$$\forall x \forall y \forall z \ x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad \forall x \ x \circ e = x, \quad \forall x \ x \circ x^{-1} = e \tag{3}$$

und erhält aus diesen Axiomen die Aussagen und Sätze der elementaren Gruppentheorie. Die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen die diese Axiome erfüllen, ist genau Klasse aller Gruppen.

Beispiel 9 (geordnete Mengen)**.** Ein Axiomensystem für geordente Mengen erhält man durch folgende Formeln in einer geeigneten Sprache erster Stufe

$$\forall x \ (x \not< x), \ \forall x \forall y \forall z \ (x < y \wedge y < z \to x < z), \ \forall x \forall y \ (x \neq y \to x < y \vee y < x) \tag{4}$$

Wiederum ist die Klasse aller Mengen die diese Axiome erfüllen genau die Klasse der geordneten Mengen.

Nach diesen einführenden Beispielen und Definitionen werden wir im nun folgenden Teil einige Aussagen über die Semantik elementarer Sprachen formulieren und beweisen. Wir beginnen mit dem

Theorem 10 (Koinzidenzsatz)**.** *Sei φ eine Formel in einer elementaren Sprache. Sei frei$\varphi \subseteq V \subseteq$ Var und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$' Modelle über demselben Träger A so dass*

(i) $x^{\mathcal{M}} = x^{\mathcal{M}'}$ für alle Variablen x aus V.

(ii) $\zeta^{\mathcal{M}} = \zeta^{\mathcal{M}'}$ für alle in φ vorkommenden nichtlogischen Symbole ζ.

Dann gilt $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \varphi$.

Beweis. Durch Induktion über φ: Der Wert eines Terms $\vec{t}$ hängt nur von den in $\vec{t}$ vorkommenden Symbolen ab. Nach Voraussetzung gilt dann $\vec{t}^{\mathcal{M}} = \vec{t}^{\mathcal{M}'}$.

(r) Sei r eine Relation. Dann gilt

$$\mathcal{M} \models r\vec{t} \overset{(r)}{\Leftrightarrow} r^{\mathcal{M}} t^{\mathcal{M}} \overset{(i),(ii)}{\Leftrightarrow} r^{\mathcal{M}} t^{\mathcal{M}'} \overset{(i),(ii)}{\Leftrightarrow} r^{\mathcal{M}'} t^{\mathcal{M}'} \overset{(r)}{\Leftrightarrow} \mathcal{M}' \models r\vec{t}.$$

(=) Der Beweis für $=$ ist genau analog zu dem obenstehenden von (r).

($\wedge$) $\mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha, \beta \overset{IA}{\Leftrightarrow} \mathcal{M}' \models \alpha, \beta \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \alpha \wedge \beta$

($\neg$) Analog zu ($\wedge$).

($\forall$) Es gelte $\mathcal{M} \models \forall x\ \varphi$ und es sei $a \in A$ gegeben, mit $\mathcal{M}_x^a \models \varphi$. Wir definieren $V' := V \cup \{x\}$. Dann gilt frei$(\varphi) \subseteq V \subseteq V'$. Zudem stimmen $\mathcal{M}_x^a$ und $\mathcal{M}'^a_x$ auf V' überein. Also folgt $\mathcal{M}'^a_x \models \varphi$ aus $\mathcal{M}_x^a \models \varphi$ nach Induktionsannahme. Jedoch war $a \in A$ beliebig. Nach ($\forall$) folgt also $\mathcal{M}' \models \forall x\ \varphi$ aus $\mathcal{M} \models \forall x\ \varphi$. Die Implikation in die Gegenrichtung erfolgt indem man $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ vertauscht.

Damit ist die der Koinzidenzsatz bewiesen. □

Korollar 11 (tertium non datur)**.** *Für eine beliebige $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ erfüllen Aussagen α einer Sprache 1. Stufe das sogenannte „tertium non datur“, d.h. es gilt entweder $\mathcal{A} \models \alpha$ oder $\mathcal{A} \models \neg\alpha$.*

Beweis. Das Korollar folgta ausTheorem 10 mit $V = \emptyset$ □

Korollar 12. *Falls $x \notin$ frei(φ) gilt für jede Formel φ*

$$\forall x\ \varphi \equiv \varphi \equiv \exists x\ \varphi \tag{5}$$

Insbesondere können bei der Formulierung von Aussagen in der Sprache 1. Stufe überflüssige Quantoren weggelassen werden.

Beweis. Da $x \notin$ frei(φ) setzt man $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_x^a$ für ein beliebiges a aus A und V :=frei(φ) und erhält mit Theorem 10: $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_x^a \models \varphi$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \forall x\ \varphi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}_x^a \models \varphi \text{ für alle } a \text{ in } A) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \\
&\Leftrightarrow (\mathcal{M}_x^a \models \varphi \text{ für ein } a \text{ in } A) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \exists x\ \varphi
\end{aligned}$$

□

Korollar 13. *Die Erfüllbarkeit einer Formel φ hängt nur von den in φ vorkommenden Symbolen ab. Desweiteren ist die Erfüllbarkeit von φ in $(\mathcal{A}, w)$ nur von den durch w festgelegten Werten der freien Variablen abhängig.*

Beweis. Theorem 10 mit $V = Var$. □

Bevor wir zur Definition eines Prädikates kommen können, führen wir noch eine weitere Notation ein und zeigen

Lemma 14. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w)$, $\mathcal{M}' = (\mathcal{B}, w)$ mit $w : Var \longrightarrow A$. Dann gilt für alle Terme t: $t^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}'}$*

Beweis. Beweis durch Terminduktion. Die Behauptung ist klar für alle Primterme, da deren Werte schon durch w festgelegt sind. Es gilt nach Induktionsannahme für $i \in \{1, ..., n\}$: $t_i^{\mathcal{M}} = t_i^{\mathcal{M}'}$. Daraus folgt

$$(ft_1 \cdots t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}}) = f^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}, ..., t_n^{\mathcal{M}'}) = (ft_1 \cdots t_n)^{\mathcal{M}'}$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Falls eine Formel φ nur von $\vec{x}$ abhängt, in Zeichen $\varphi = \varphi(\vec{x})$, und $\vec{a} \in A$ gegeben ist, ist folgende Notation sinnvoll nach Korollar 13: Falls $w(\vec{x}) = \vec{a}$ und $(\mathcal{A}, w) \models \varphi$ so schreiben wir $\mathcal{A} \models \varphi(\vec{a})$ und $t(\vec{x}) = t^{\mathcal{A}}(\vec{a})$.

Definition 15. Prädikat
Für eine Formel $\varphi = \varphi(\vec{x})$ heisst $\varphi^{\mathcal{A}} := \{\vec{a} \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(\vec{a})\}$ das von φ in $\mathcal{A}$ definierte Prädikat. Ein Prädikat $P \subseteq A^n$ heisst in $\mathcal{A}$ definierbar, wenn es eine Formel φ gibt mit $P = \varphi^{\mathcal{A}}$.

Bemerkung 16. Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Im Allgemeinen gilt $\varphi^{\mathcal{A}} = \varphi^{\mathcal{B}} \cap \mathcal{A}^n$ nicht, wie das Beispiel $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$ verdeutlicht. Denn $\varphi := \exists z\ z + y = x$ entspricht in $(\mathbb{N}, +)$ dem $\leq$-Prädikat $(\leq (x, y)) := \exists z\ z + x = y$, ist in $(\mathbb{Z}, +)$ jedoch eine Tautologie. Für quantorenfreie Formeln φ gilt jedoch $\varphi^{\mathcal{A}} = \varphi^{\mathcal{B}} \cap \mathcal{A}$. Das nächste Theorem wird zeigen, dass diese Bedingung sogar kennzeichnend für $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ist.

Theorem 17. *Substruktursatz*
Für Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ mit $A \subseteq B$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

(ii) $\mathcal{A} \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\vec{a})$ *für alle quantorenfreien Formeln* $\varphi = \varphi(\vec{x})$ *und alle* $\vec{a}$ *in* A^n.

(iii) $\mathcal{A} \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\vec{a})$ *für alle Primformeln* $\varphi = \varphi(\vec{x})$ *und alle* $\vec{a}$ *in* A^n.

Beweis. [(*i*) ⇒ (*ii*)]
Es genügt $\mathcal{M} := (\mathcal{A}, w) \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}' := (\mathcal{B}, w) \models \varphi$ für alle $w : \mathrm{Var} \longrightarrow A$ zu zeigen. Für Primformeln folgt die Aussage aus Lemma 14 . Die Induktionsschritte über $=, \wedge,$ und$\neg$ erfolgen genau wie im Beweis von Theorem 10.

$[(ii) \Rightarrow (iii)]$
Da jede Primformel insbesondere quantorenfrei ist, ist die Implikation trivial.
$[(iii) \Rightarrow (i)]$
Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{A}$ sowohl unter Relationen r als auch unter Operationen f abgeschlossen ist. Sei $\vec{a} \in A^n$ und $a' \in A$

$$(r)\ \ r^{\mathcal{A}}\vec{a} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (r\vec{x}(\vec{a})) \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} (\mathcal{B} \models r\vec{x}(\vec{a})) \Leftrightarrow r^{\mathcal{B}}\vec{a}$$

$$(f)\ \ f^{\mathcal{A}}\vec{a} = a' \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (f\vec{x} = y)(\vec{a}, a') \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models (f\vec{x} = y)(\vec{a}, a') \Leftrightarrow f^{\mathcal{B}}\vec{a} = a'.$$

Da (r) und (f) für alle $\vec{a}$ und a' gelten, folgt die gewünschte Implikation und der Substruktursatz ist bewiesen. □

Bevor wir ein wichtiges Korollar des Substruktursatz definieren können, benötigen wir eine weitere

Definition 18 (∀- und ∃-Formeln, ∀- und ∃- Aussagen)**.** Seien α eine Formel (bzw. Aussage) und β eine quantorenfreie Formel (bzw. Aussage) in einer Sprache 1. Stufe.

1. α heisst ∀-*Formel (bzw.* ∀-*Aussage)*, falls $\alpha = \forall\vec{x}\ \beta$.

2. α heisst ∃-*Formel (bzw.* ∃-*Aussage)*, falls $\alpha = \exists\vec{x}\ \beta$.

Beispiel 19 (Anzahlaussagen)**.** Sei $n \geq 2$.Wir definieren:

$$\exists_1 := \exists x_0\ x_0 = x_0 \quad \text{und} \quad \exists_n := \exists x_0 \cdots x_n \bigwedge_{i<j<n} x_i \neq x_j$$

Dann bedeutet

1. $\exists_n$ „Es gibt mindestens n Elemente“.

2. $\neg\exists_n$ „Es gibt höchstens $n-1$ Elemente“.

3. $\exists_n \wedge \neg\exists_{n+1}$ „Es gibt genau n Elemente“.

Korollar 20. *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Dann gilt jede in $\mathcal{B}$ gültige ∀-Aussage β auch in $\mathcal{A}$. Umgekehrt gilt jede in $\mathcal{A}$ gültige ∃-Aussage α auch in $\mathcal{B}$.*

Beweis. Sei $\vec{a} \in A^n$. Nach Vorraussetzung gilt $\beta = \forall\vec{x}\beta'$ mit β' quantorenfrei. Angenommen $\mathcal{B} \models \forall\vec{x}\beta'$. Dann gilt $\mathcal{B} \models \beta'(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta'(\vec{a})$ nach dem Substruktursatz. Da a beliebig war gilt also

$$\mathcal{B} \models \forall\vec{x}\beta \Rightarrow \mathcal{A} \models \forall\vec{x}\beta'. \tag{6}$$

Für den Beweis der zweiten Behauptung beobachtet man zunächst, dass

1. $\mathcal{B} \not\models \exists\vec{x}\beta'$ äquivalent zu $\mathcal{B} \models \forall\vec{x}\neg\beta'$ ist,

2. $\mathcal{A} \models \forall\vec{x}\neg\beta'$ äquivalent zu $\mathcal{A} \not\models \exists\vec{x}\neg\beta'$ ist.

Ist nun $\alpha' := \neg\beta'$ folgt durch Negation der Aussage 6

$$\mathcal{A} \models \exists\vec{x}\ \alpha' \Rightarrow \mathcal{B} \models \exists\vec{x}\ \alpha'$$

und das Korollar ist bewiesen. $\square$

Als nächstes zeigen wir eine Verallgemeinerung von Sätzen wie „Das isomorphe Bild einer Gruppe ist wieder eine Gruppe “oder „Gilt eine Aussage in einem Körper K, so gilt sie auch in jedem zu K isomorphen Körper.“

Theorem 21 (Invarianzsatz)**.** *Sei $\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{L}$-Strukturen und $n \geq 0$. Dann gilt für alle $\varphi = \varphi(\vec{x})$ und alle $\vec{a}$ in A^n:*

$$\mathcal{A} \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(i(\vec{a})) \tag{7}$$

Inbesondere gilt für alle Aussagen α von $\mathcal{L}$: $\mathcal{A} \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \alpha$.

Beweis. Sei $\mathcal{M} := (\mathcal{A}, w)$, $\mathcal{M}' := (\mathcal{B}, w')$ mit $w' : \mathrm{Var} \longrightarrow B, x \mapsto i(x^w)$. Dann ist die Behauptung äquivalent zu

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \varphi. \tag{8}$$

Für den Beweis des Theorems verifiziert man zunächst, dass $\iota(t^{\mathcal{M}}) = t^{\mathcal{M}'}$ für alle Terme t nach Definition von $\mathcal{M}'$ gilt. Dann beweist man (8) durch Induktion über φ analog zu den Beweisen der vorangegangen Theoreme. Für $n = 0$ erhält man die zweite Aussage des Invarianzsatzes. $\square$

Abschliessend untersuchen wir das Verhalten der Erfüllungsrelation unter Substitutionen. Es zeigt sich dass eine Einschränkung der zugelassenen Substitutionen notwendig ist um den Substitutionssatz beweisen zu können. Wir geben daher zunächst folgende

Definition 22 (Kollsionsfreiheit)**.** Eine Formel φ und eine Substitution $\frac{t}{x}$ heisst *kollisionsfrei*, wenn $y \notin gbd(\varphi)$ für alle y aus $\mathrm{var}(t) \setminus \{x\}$ gilt. Für eine globale Substitution σ heisse φ und σ *kollisionsfrei*, wenn φ und $\frac{x^\sigma}{x}$ für jedes x kollisionsfrei sind.

Sei nun $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, w)$ ein Modell und σ eine globale Substitution. Wir definieren $x^{w\sigma} := (x^\sigma)^{\mathcal{M}}$ für alle $x \in \mathrm{Var}$ und damit $\mathcal{M}^\sigma := (\mathcal{A}, w^\sigma)$. Mittels Terminduktion zeigt man, dass dann die folgende Gleichung gilt:

$$t^{\sigma\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}^\sigma} \tag{9}$$

Theorem 23 (Substitutionssatz)**.** *Sei $\mathcal{M}$ ein Modell, φ eine Formel und σ eine globale Substitution.Dann gilt Für alle kollisionsfreien φ und σ*

$$\mathcal{M} \models \varphi^\sigma \Leftrightarrow \mathcal{M}^\sigma \models \varphi. \tag{10}$$

Insbesondere gilt dann $\mathcal{M} \models \varphi^{\vec{t}}_{\vec{x}} \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\vec{t}}_{\vec{x}} \models \varphi$ falls φ und $\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$ kollisionsfrei sind.

Beweis. Durch Induktion über φ.
Nach Gleichung (9) gilt $t^{\mathcal{M}^\sigma} = t^{\sigma\mathcal{M}}$. Daraus folgt

$$\mathcal{M} \models (t_1 = t_2)^\sigma \Leftrightarrow t_1^{\sigma\mathcal{M}} = t_2\sigma^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}^\sigma} = t_2^{\mathcal{M}^\sigma} \Leftrightarrow \mathcal{M}^\sigma \models t_1 = t_2$$

Analog verfährt man für die Induktionsschritte über r, $\wedge$ und $\neg$. Der Induktionsschritt über $\forall$ erfordert mehr Arbeit. Sei dazu $\varphi = \forall x\ \alpha$ und

$$y^\tau = \begin{cases} y^\sigma, & \text{falls } y \neq x \\ x, & \text{falls } y = x \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst:

$$(\mathcal{M}^a_x)^\tau = (\mathcal{M}^\sigma)^a_x \tag{11}$$

Für $y \neq x$ gilt

$$y^{(\mathcal{M}^a_x)^\tau} = y^{\tau\mathcal{M}^a_x} = y^{\sigma\mathcal{M}^a_x} = y^{\sigma\mathcal{M}} = y^{\mathcal{M}^\sigma} = y^{(\mathcal{M}^\sigma)^a_x}$$

und für $y = x$ gilt

$$x^{(\mathcal{M}^a_x)^\tau} = x^{\tau(\mathcal{M}^a_x)} = x^{(\mathcal{M}^a_x)} = a = x^{(\mathcal{M}^\sigma)^a_x}$$

also gilt Gleichung (10) allgemein.
Nun zeigen wir den Induktionsschritt über $\forall$:

$\mathcal{M} \models (\forall x\ \alpha)^\sigma$
$\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall x\ \alpha^\tau$(Nach Definition von τ)
$\Leftrightarrow \mathcal{M}^a_x \models \alpha^\tau$ für alle a in A (Nach ($\forall$))
$\Leftrightarrow (\mathcal{M}^a_x)^\tau \models \alpha$ für alle a in A (Nach IA, da α, τ kollisionsfrei)
$\Leftrightarrow (\mathcal{M}^\sigma)^a_x \models \alpha$ für alle a in A (Nach (10))
$\Leftrightarrow \mathcal{M}^\sigma \models \forall x \alpha$

Damit ist der Substitutionssatz bewiesen. □

Literatur

[1] W. Rautenberg, „Einführung in die Mathematische Logik", Vieweg-Teubner, 2008