Mathematische Logik – Seminar ETH

Russellsche Antinomie, Folgerungseigenschaften, Theoriebegriff

Fabian Frei — 14. und 21. März 2012

Diese Zusammenstellung orientiert sich an den Kapiteln 2.3 bis 2.5 in *Einführung in die Mathematische Logik* von Wolfgang Rautenberg [1] sowie den vorangegangen Vorträgen dieses Seminars. Insbesondere gelten weiterhin die Konventionen, dass p, q, x, y Variablen, s, t Terme, π eine Primformel und α, β, ϕ, ψ Formeln bezeichnen.

1 Semantik elementarer Sprachen

Aus dem bereits bewiesenen Substitutionssatz der Prädikatenlogik, auf dessen Verwendung hier mit *Sub* hingewiesen werden soll, folgt ein kleines, oft verwendetes

Korollar 1.1

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel und seien $\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$ und $\frac{\vec{s}}{\vec{x}}$ zwei mit ϕ kollisionsfreie Substitutionen. Dann gelten:

(a) $\forall\vec{x}\phi \models \phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$

(b) $\phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}} \models \exists\vec{x}\phi$

(c) $\phi\frac{\vec{s}}{\vec{x}}, \vec{s} = \vec{t} \models \phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$

Beweis:

(a) Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell mit $\mathcal{M} \models \forall\vec{x}\phi$.

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \forall\vec{x}\phi \;:\Longleftrightarrow\; & \left(\mathcal{M}^{\vec{a}}_{\vec{x}} \models \phi \text{ für alle } \vec{a} \in A^n\right)\\ \Longrightarrow\; & \mathcal{M}^{\vec{t}}_{\vec{x}} \models \phi\\ \overset{\text{Sub}}{\Longleftrightarrow}\; & \mathcal{M} \models \phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}\end{aligned}$$

(b) Aus (a) folgt $\neg\exists\vec{x}\phi := \neg\neg\forall\vec{x}\neg\phi \equiv \forall\vec{x}\,(\neg\phi) \models (\neg\phi)\,\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$.
Somit gilt $\phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}} \models \exists\vec{x}\phi$, was gleichbedeutend ist mit $\neg\exists\vec{x}\phi \models \neg\phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$.

(c) Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell mit $\mathcal{M} \models \phi\frac{\vec{s}}{\vec{x}}$ und $\mathcal{M} \models \vec{s} = \vec{t}$.
Letzteres bedeutet $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \phi\frac{\vec{s}}{\vec{x}} \;\overset{\text{Sub}}{\Longleftrightarrow}\; & \mathcal{M}^{\vec{s}}_{\vec{x}} \models \phi\\ \Longleftrightarrow\; & \mathcal{M}^{\vec{t}}_{\vec{x}} \models \phi\\ \overset{\text{Sub}}{\Longleftrightarrow}\; & \mathcal{M} \models \phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}\end{aligned}$$

$\square$

2 Allgemeingültigkeit und logische Äquivalenz

Für jede prädikatenlogische Formel α ist $\alpha \vee \neg\alpha$ eine Tautologie, da $p \vee \neg p$ eine aussagenlogische Tautologie ist. Allgemein lassen sich aus jeder aussagenlogischen Tautologie unendlich viele prädikatenlogische Tautologien herleiten, indem man die Anfangsvariablen durch prädikatenlogische Formeln ersetzt. Genauer formuliert:

Proposition 2.1 *Sei τ eine aussagenlogische Tautologie in den Aussagevariablen $AV = \{v_1, v_2, \ldots\}$ und seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ beliebige prädikatenlogische Formeln. Dann ist die prädikatenlogische Formel τ', die aus τ durch Ersetzen aller v_i mit α_i entsteht, eine Tautologie. Auf analoge Weise entstehen prädikatenlogische Kontradiktionen aus aussagenlogischen Kontradiktionen.*

Beweis: Sei w_0 die aussagenlogische Belegung, die definiert ist durch $w_0 \models v_i \;:\Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha_i$. Weil die rekursiven Definitionen der Erfüllungsklauseln der Junktoren $\wedge$ und $\neg$ in der Aussagen- und Prädikatenlogik übereinstimmen, gilt $\mathcal{M} \models \tau' \iff w_0 \models \tau$. Nun wird die Tautologie τ unabhängig von der Definition von w_0, also auch unabhängig von der Wahl von $\mathcal{M}$ erfüllt. Mit $w_0 \models \tau$ gilt also auch $\mathcal{M} \models \tau'$ für jede Wahl von $\mathcal{M}$. $\square$

Doch längst nicht alle prädikatenlogische Tautologien lassen sich auf diese Weise erzeugen, so etwa $\exists x \; x = x$ und $\exists x \; x = t$.
Ersteres gilt, da Strukturen definitionsgemäss nichtleer sind, und letzteres, da Operationen bezüglich der Grundmenge definitionsgemäss abgeschlossen sind.

Eine bedeutende Tautologie wird als Russellsche Antinomie bezeichnet.

Satz 2.2 (Russellsche Antinomie) *Sei r eine zweistelliges Relationssymbol. Dann ist die Aussage $\neg\exists y \forall x (rxy \leftrightarrow \neg rxx)$ eine Tautologie.*

Beweis: Die Proposition 2.1 mit $\alpha_1 := ryy$ liefert aus dem Falsum $\perp := (v_1 \wedge \neg v_1)$ die Kontradiktion $(ryy \leftrightarrow \neg ryy)$. Nach Korollar 1.1a gilt $\forall x (rxy \leftrightarrow \neg rxx) \models (ryy \leftrightarrow \neg ryy)$, also muss auch die Formel $\forall x (rxy \leftrightarrow \neg rxx)$ eine Kontradiktion sein, und, wie man mit Hilfe der Erfüllungsklauseln sieht, $\exists y \forall x (rxy \leftrightarrow \neg rxx)$ ebenso. Also ist $\neg\exists y \forall x (rxy \leftrightarrow \neg rxx)$ eine Tautologie. $\square$

Interpretiert man die zweistelligen Relation r als der Elementbeziehung $\in$ und die Variablen x und y als Mengen, so erhält man die für die Mengenlehre folgenreiche Aussage: „Es gibt keine Menge y, die jede Menge x genau dann enthält, wenn x sich nicht selbst enthält.“
Für eine gegebene Formelmenge X ist eine Antinomie im logischen Sinne ein Paar $(\alpha, \neg\alpha)$ mit $X \models \alpha$ und $X \models \neg\alpha$. Ein solches Paar bekommen wir mit obigem Satz genau dann, wenn auch $\exists y \forall x (rxy \leftrightarrow \neg rxx)$ aus X folgt, wenn also eine Menge existiert, welche genau jene Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Genau dies besagt aber das *Komprehensionsaxiom* der naiven Mengenlehre, welches für jede einstellige Relationen P die Existenz einer Menge $y := \{x | Px\}$ postuliert. Formal lautet

dieses Axiom $\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow Px)$ und mit der Anwendung $Px \;:\Longleftrightarrow\; rxx$ erhält man gerade $\exists y \forall x(rxy \leftrightarrow \neg rxx)$. Ein Auflösung der Antinomie im Rahmen unserer bisher erarbeiteten elementaren Logik bedingt somit eine Einschränkung dieser naiven Mengenbildung. In der *Zermeloschen Mengenlehre* wird das Komprehensionsaxiom beispielsweise zum *Aussonderungsprinzip* abgeschwächt. Dieses erlaubt es nur mehr, aus jeder gegebenen Menge z für jede einstellige Relation P gerade jene Elemente zu einer neuen Menge auszusondern, für welche P erfüllt ist. Formal äussert sich dies in der zusätzlichen Klausel $x \in z$ im Aussonderungsprinzip $\exists y \forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge Px)$. Das Entfernen des Komprehensionsaxiom aus X verhindert zwar die direkte Herleitung des Widerspruchs, schliesst aber nicht aus, dass die Antinomie trotzdem gelten könnte.

Das semantische Deduktionstheorem der Aussagenlogik gilt in der Prädikatenlogik analog:

Satz 2.3 (Deduktionstheorem) $\quad X, \alpha \models \beta \iff X \models \alpha \to \beta$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $X, \alpha \models \beta$ und $\mathcal{M}$ ein Modell mit $\mathcal{M} \models X$.
Falls nun $\mathcal{M} \models \alpha$, so gilt $\mathcal{M} \models X, \alpha$ und nach Voraussetzung $\mathcal{M} \models \beta$, was der Forderung $X \models \alpha \to \beta$ entspricht.
Falls aber $\mathcal{M} \not\models \alpha$, ist $X \models \alpha \to \beta$ als leere Aussage erfüllt.
„$\Leftarrow$“: Sei $X \models \alpha \to \beta$ und $\mathcal{M}$ ein Modell mit $\mathcal{M} \models X$.
Falls nun $\mathcal{M} \models \alpha$, so liefert die Voraussetzung $\mathcal{M} \models \beta$, was der Forderung $X, \alpha \models \beta$ entspricht.
Falls aber $\mathcal{M} \not\models \alpha$, ist $X, \alpha \models \beta$ als leere Aussage erfüllt. $\square$

Das Deduktionstheorem erlaubt es durch wiederholte Anwendung insbesondere, Folgerungsrelationen als allgemeingültige Implikationsketten auszudrücken (gemäss unserer Konvention weiterhin mit impliziter Rechtsklammerung) und umgekehrt:

Proposition 2.4 *Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ prädikatenlogische Formeln. Dann gilt:* $\quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \alpha_{n+1} \iff \models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \alpha_n \to \alpha_{n+1}$

Beweis: Wende n Mal das Deduktionstheorem an, nämlich für $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ mit $X := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1-i}\}$ und $\alpha := \alpha_{n-i}$ und $\beta := \alpha_{n+1-i} \to \ldots \to \alpha_{n+1}$. $\square$

Damit erhalten wir unmittelbar drei neue Familien von Tautologien:

Korollar 2.5
Sei ϕ eine aussagenlogische Formel und seien $\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$ und $\frac{\vec{s}}{\vec{x}}$ zwei mit ϕ kollisionsfreie Substitution. Dann gelten:

(a) $\models \forall\vec{x}\phi \to \phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$

(b) $\models \phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}} \to \exists\vec{x}\phi$

(c) $\models \phi\frac{\vec{s}}{\vec{x}} \to \vec{s} = \vec{t} \to \phi\frac{\vec{t}}{\vec{x}}$

Beweis: Direkte Anwendung von Proposition 2.4 auf die drei Resultate von Korollar 1.1. □

Die Äquivalenzrelation $\equiv$ der Prädikatenlogik ist eine *Kongruenzrelation* auf $\mathcal{L}$ gemäss folgender

Definition 2.6 Sei M eine beliebige Menge, sei $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf M und sei Ω eine Teilmenge der Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Abb}(M^n, M)$ *aller endlichstelligen Operationen auf* M.
Gilt nun für jede Operation $f \in \Omega$, deren Stelligkeit mit n bezeichnet sei, und für sämtliche $m_1, , \ldots, m_n, m'_1, \ldots, m'_n \in M$ die

$$\text{Kongruenzbedingung:} \quad m_1 \approx m'_1, \ldots, m_n \approx m'_n \implies fm_1 \ldots m_n \approx fm'_1 \ldots m'_n,$$

so heisst die Äquivalenzrelation $\approx$ *mit den Operationen* Ω *verträglich* und sie wird *Kongruenzrelation* oder kurz *Kongruenz* in M genannt. Äquivalente Elemente nennt man in diesem Fall auch *kongruent*.

Proposition 2.7 *Die Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $\mathcal{L}$ ist eine Kongruenzrelation in $\mathcal{L}$, d. h. sie verträglich mit den von den Junktoren $\wedge$, $\neg$ und $\forall x$ für jede Variable x induzierten Abbildungen $\wedge : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L},\ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ und $\neg : \mathcal{L} \to \mathcal{L},\ \alpha \mapsto \neg\alpha$ und $\forall x : \mathcal{L} \to \mathcal{L},\ \alpha \mapsto \forall x\alpha$.*

Beweis: Das Einsetzen der Definitionen von $\equiv$ und der Erfüllungsklauseln der Prädikatenlogik für die Junktoren in die Kongruenzbedingung beweist die Behauptung. Es folgen nun die explizit aufgeschriebenen Beweise.

Die Kongruenzbedingung von $\wedge$ lautet:
$[\alpha \equiv \alpha' \text{ und } \beta \equiv \beta'] \implies [\alpha \wedge \beta \equiv \alpha' \wedge \beta']$

Nach Einsetzen der Definition von $\equiv$ ist dies gerade:

$$\Big[(\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \alpha \iff \mathcal{M} \models \alpha') \\ \text{und } (\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \beta \iff \mathcal{M} \models \beta')\Big] \implies \\ \Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{M} \models \alpha' \wedge \beta'\Big]$$

Setzt man noch die Definition der Erfüllungsklausel von $\wedge$ ein, erhält man die unmittelbar verfizierbare Form der Behauptung:

$$\Big[(\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \alpha \iff \mathcal{M} \models \alpha')$$
$$\text{und } (\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \beta \iff \mathcal{M} \models \beta') \Big] \implies$$
$$\Big[\Big(\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \alpha \text{ und } \mathcal{M} \models \beta\Big) \Leftrightarrow \Big(\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \alpha' \text{ und } \mathcal{M} \models \beta'\Big)\Big]$$

Die Kongruenzbedingung von $\neg$ lautet:
$[\alpha \equiv \alpha'] \implies [\neg\alpha \equiv \neg\alpha']$

Das Ausschreiben der Definition von $\equiv$ einerseits,
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \alpha \iff \mathcal{M} \models \alpha'\Big] \implies$$
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \neg\alpha \iff \mathcal{M} \models \neg\alpha'\Big],$$

und von $\mathcal{M} \models \neg\alpha$ andererseits,
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \models \alpha \iff \mathcal{M} \models \alpha'\Big] \implies$$
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ ist } \mathcal{M} \not\models \alpha \iff \mathcal{M} \not\models \alpha'\Big],$$

macht die behauptete Implikation (und zugleich ihre Umkehrung) offensichtlich.

Und abschliessend zur Kongruenzbedingung von $\forall x$. Diese lautet:
$[\alpha \equiv \alpha'] \implies [\forall x\alpha \equiv \forall x\alpha']$

Nach Einsetzen der Definition von $\equiv$ ist dies gerade:
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ gilt } \mathcal{M} \models \alpha \iff \mathcal{M} \models \alpha'\Big] \implies$$
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ gilt } \mathcal{M} \models \forall x\alpha \iff \mathcal{M} \models \forall x\alpha'\Big],$$

Die Definition von $\mathcal{M} \models \forall x\alpha$ besagt dabei gerade:
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ gilt } \mathcal{M} \models \alpha \iff \mathcal{M} \models \alpha'\Big] \implies$$
$$\Big[\text{Für alle } \mathcal{M} \text{ gilt, dass für alle } a \in A \text{ gilt: } \mathcal{M}^a_x \models \alpha \iff \mathcal{M}^a_x \models \alpha'\Big]$$

Für jede Wahl von $\mathcal{M}$ und $a \in A$ in der zweite Klammer folgt das geforderte $\mathcal{M}^a_x \models \alpha \iff \mathcal{M}^a_x \models \alpha'$ nun direkt aus der Voraussetzung, da $\mathcal{M}^a_x$ wiederum ein Modell ist.

□

Für alle Kongruenzen in $\mathcal{L}$ gilt das folgende Ersetzungstheorem. Mit *Ers* werde auf eine Verwendung davon hingewiesen.

Satz 2.8 (Ersetzungstheorem) *Sei $\approx$ eine Kongruenz in $\mathcal{L}$ und seien $\alpha \approx \alpha'$ zwei kongruente Formeln. Sei ϕ eine weitere Formel, in der α als Subformel vorkommt. Es bezeichne nun ϕ' die Formel, die aus ϕ entsteht, wenn man eine oder mehrere Stellen auswählt, wo α in ϕ als Subformel vorkommt, und dort α durch α' ersetzt. Dann gilt auch $\phi \approx \phi'$.*

Beweis: Formelinduktion über ϕ:

1. *Induktionsanfang:* Sei ϕ eine Primformel π. Es gilt entweder $\pi = \alpha$ oder $\pi \neq \alpha$. In beiden Fällen bestätigt sich die Behauptung unmittelbar.

2. *Induktionschritt:* Sei ϕ keine Primformel. Entweder ist $\phi = \alpha$, dann gilt $\phi = \alpha \approx \alpha' = \phi'$. Falls aber $\phi \neq \alpha$, gilt entweder

   a) $\phi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$ und $\phi' = (\phi'_1 \wedge \phi'_2)$, oder

   b) $\phi = \neg\phi_1$ und $\phi' = \neg\phi'_1$, oder

   c) $\phi = \forall x \phi_1$ und $\phi' = \forall x \phi'_1$ für irgendeine Variable x,

   wobei ϕ'_i aus ϕ durch Ersetzen von α an den schon bei ϕ gewählten Stellen entsteht.
   Aus der Induktionsvoraussetzung $\phi_1 \approx \phi'_1$ und eventuell $\phi_2 \approx \phi'_2$ folgt mit der Kongruenzbedingung in allen drei Fällen $\phi \approx \phi'$.

□

Wir bezeichnen $\rightarrow$ als einen mittels $\neg$ und $\wedge$ durch $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 := \neg(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2)$ definierten, zweistelligen Junktor. Allgemein können wir jede prädikatenlogische Formel $\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Primformeln der Subformeln von ϕ bezeichnen, als n-stelligen, mittels $\neg$, $\wedge$ und $\forall x$ definierten Junktor $J\alpha_1 \ldots \alpha_n := \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ betrachten. Für jeden solchen Junktor ist die Kongruenzbedingung erfüllt, wie folgendes Korollar des Ersetzungstheorems beweist.

Korollar 2.9 *Eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{L}$ ist mit jedem Junktor J verträglich, der mittels $\wedge$, $\neg$ und $\forall x$ für beliebige Variablen x definiert ist.*

Beweis: Sei J ein n-stelliger Junktor. Es sei $\alpha_1 \equiv \alpha'_1, \ldots, \alpha_n \equiv \alpha'_n$. Zu zeigen ist $J\alpha_1 \ldots \alpha_n \equiv J\alpha'_1 \ldots \alpha'_n$. Mit n-maliger Anwendung das Ersetzungstheorem – konkret für $i = 1, \ldots, n$ jeweils mit $\phi := J\alpha_1 \ldots \alpha_n$ und $\alpha := \alpha_i$ und Auswahl genau jener Stellen, wo das i-te Argument von J eingesetzt wurde – erhält man die Äquivalenzenkette $J\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n \equiv J\alpha'_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n \equiv \ldots \equiv J\alpha'_1\alpha'_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n \equiv J\alpha'_1\alpha'_2 \ldots \alpha'_{n-1}\alpha_n \equiv J\alpha'_1\alpha'_2 \ldots \alpha'_{n-1}\alpha'_n$.

Als Beispiel sei die Kongruenzbedingung von $\rightarrow$ nochmals explizit nachgewiesen.
Es gelte $\alpha \equiv \alpha'$ und $\beta \equiv \beta'$. Daraus folgt:
$\alpha \rightarrow \beta := \neg\,(\alpha \wedge \neg\beta) \overset{\text{Ers}}{\equiv} \neg\,(\alpha' \wedge \neg\beta) \overset{\text{Ers}}{\equiv} \neg\,(\alpha' \wedge \neg\beta') =: \alpha' \rightarrow \beta'$.

□

Mit Hilfe des Substitutionssatzes und des Ersetzungstheorems können wir die folgenden, meist stillschweigend vorausgesetzten Äquivalenzen beweisen:

Proposition 2.10 *Für beliebige prädikatenlogische Formeln α und β gelten:*

(a) $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$ (b) $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$

(c) $\forall x(\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$ (d) $\exists x(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x\alpha \vee \exists x\beta$

(e) $\forall x\forall y\alpha \equiv \forall y\forall x\alpha$ (f) $\exists x\exists y\alpha \equiv \exists y\exists x\alpha$

Falls x in der Formel β nicht frei vorkommt, gelten darüber hinaus:

(g) $\forall x(\alpha \vee \beta) \equiv \forall x\alpha \vee \beta$ (h) $\exists x(\alpha \wedge \beta) \equiv \exists x\alpha \wedge \beta$

(i) $\forall x\beta \equiv \beta$ (j) $\exists x\beta \equiv \beta$

(k) $\forall x(\alpha \to \beta) \equiv \exists x\alpha \to \beta$ (l) $\exists x(\alpha \to \beta) \equiv \forall x\alpha \to \beta$

Und sofern $y \notin var\,\alpha$ erfüllt ist, gelten:

(m) $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha\frac{y}{x}$ (n) $\exists x\alpha \equiv \exists y\alpha\frac{y}{x}$

Beweis: Zu (a) und (b):
Laut der Definition der Erfüllungsklausel von $\neg$ gilt $\phi \equiv \neg\neg\phi$. Daraus ergibt sich (b) direkt: $\neg\exists x\alpha := \neg\neg\forall x\neg\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$
Die Anwendung des Ersetzungstheorems mit $\alpha' := \neg\neg\alpha$ beweist (a):
$\neg\forall x\alpha \equiv \neg\forall x\neg\neg\alpha =: \exists x\neg\alpha$.
Direkt aus den Definitionen der Erfüllungsrelation ergeben sich (c), (e), (g) und (i), die dazu analogen Aussagen (d), (f), (h) und (j) und auch (k) und (l) kann man jeweils in wenigen Zeilen ableiten. Das Ersetzungstheorem wird dabei häufig angewendet:

$$
\begin{aligned}
(f)\ \exists x\exists y\alpha &:= \neg\forall x\neg\neg\forall y\neg\alpha \\
&\equiv \neg\forall x\forall y\neg\alpha \\
&\equiv \neg\forall y\forall x\neg\alpha \\
&\equiv \neg\forall y\neg\neg\forall x\neg\alpha \\
&=: \exists y\exists x\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(j)\ \exists x\beta &:= \neg\forall x\neg\beta \\
&\equiv \neg\neg\beta \\
&\equiv \beta
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(d)\ \exists x(\alpha \vee \beta) &:= \neg\forall x \neg\left(\neg\left(\neg\alpha \wedge \neg\beta\right)\right) \\ &:= \neg\forall x \neg\neg\left(\neg\alpha \wedge \neg\beta\right) \\ &\equiv \neg\forall x\left(\neg\alpha \wedge \neg\beta\right) \\ &\equiv \neg\left(\forall x \neg\alpha \wedge \forall x \neg\beta\right) \\ &\overset{\text{(b)}}{\equiv} \neg\left(\neg\exists x\alpha \wedge \neg\exists x\beta\right) \\ &=: \exists x\alpha \vee \exists x\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(h)\ \exists x(\alpha \wedge \beta) &:= \neg\forall x \neg(\alpha \wedge \beta) \\ &=: \neg\forall x(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ &\equiv \neg(\forall x \neg\alpha \vee \forall x \neg\beta) \\ &\equiv \neg(\neg\exists x\alpha \vee \neg\exists x\beta) \\ &\overset{\text{(j)}}{\equiv} \neg(\neg\exists x\alpha \vee \neg\beta) \\ &=:\equiv \exists x\alpha \wedge \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k)\ \forall x(\alpha \to \beta) &:= \forall x \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \\ &\overset{\text{(b)}}{\equiv} \neg\exists x(\alpha \wedge \neg\beta) \\ &\overset{\text{(h)}}{\equiv} \neg(\exists x\alpha \wedge \neg\beta) \\ &=: \exists x\alpha \to \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(l)\ \exists x(\alpha \to \beta) &:= \exists x \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \\ &\overset{\text{(a)}}{\equiv} \neg\forall x(\alpha \wedge \neg\beta) \\ &\overset{\text{(g)}}{\equiv} \neg(\forall x\alpha \wedge \neg\beta) \\ &=: \forall x\alpha \to \beta\end{aligned}$$

Und abschliessend zu (m) und (n):
Für (m) wird wieder auf die Definitionen der Erfüllungsklauseln zurückgegriffen. Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell $\mathcal{M}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \forall x\alpha &:\Leftrightarrow \mathcal{M}^a_x \models \alpha \text{ für alle } a \in A \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^a_y{}^a_x \models \alpha \text{ für alle } a \in A \text{ (Koinzidenzsatz; } y \notin var\,\alpha) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^a_y{}^y_x \models \alpha \text{ für alle } a \in A \text{ (denn } M^a_y{}^y_x = (M^a_y)^{y^{M^a_y}}_x = \mathcal{M}^a_y{}^a_x) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^a_y \models \alpha\frac{y}{x} \text{ für alle } a \in A \text{ (Substitutionssatz; } \alpha\frac{y}{x} \text{ sind kollionsfrei)} \\ &\Leftrightarrow: \mathcal{M} \models \forall y\alpha\frac{y}{x}\end{aligned}$$

Aus (m) ergibt sich (n) durch eine weitere äquivalente Umformung:

$$\exists x\alpha := \neg\forall x\neg\alpha \equiv \neg\forall y\left(\neg\alpha\right)\frac{y}{x} \equiv \neg\forall y\neg\alpha\frac{y}{x} =: \exists x\alpha\frac{y}{x}$$

$\square$

Die Äquivalenzen (a) und (b) beschreiben die *Dualität von* $\exists$ *und* $\forall$, während (m) und (n) die *gebundene Umbenennungen* erlauben.

3 Logisches Folgern und der Theoriebegriff

Wie bereits in Proposition 1.1 betont und verwendet sind die Erfüllungsbedingungen für die Junktoren $\wedge$, $\neg$ in der Prädikatenlogik gegenüber der Aussagenlogik unverändert. Somit gelten insbesondere sämtliche aussagenlogische Folgernseigenschaften auch für das prädikatenlogische Folgern. Damit übertragen sich automatisch alle hieraus gewonnenen Eigenschaften wie die Reflexivität und Transitivität von $\models$ oder das oben exemplarisch nochmals nachgewiesene Deduktionstheorem. In der verfeinerten Sprache der Prädikatenlogik gelten aber auch neue, nicht aus der Prädikatenlogik ableitbare Eigenschaften.

Satz 3.1 (Prädikatenlogische Folgerungseigenschaften)
Die prädikatenlogische Folgerungsrelation $\models$ genügt den folgenden Regeln:

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{(a)} & \dfrac{X \models \forall x\alpha}{X \models \alpha\frac{t}{x}}, \quad \alpha, \dfrac{t}{x} \text{ kollisionsfrei} \\
 & \text{(b)} & \dfrac{X \models \alpha\frac{s}{x}, s = t}{X \models \alpha\frac{t}{x}}, \quad \alpha, \dfrac{s}{x}\ , \alpha, \dfrac{t}{x} \text{ kollisionsfrei} \\
\text{vordere Generalisierung:} & \text{(c)} & \dfrac{X, \beta \models \alpha}{X, \forall x\beta \models \alpha} \\
\text{hintere Generalisierung:} & \text{(d)} & \dfrac{X \models \alpha}{X \models \forall x\alpha}, \quad x \notin \mathit{frei}\, X \\
\text{vordere Partikularisierung:} & \text{(e)} & \dfrac{X, \beta \models \alpha}{X, \exists x\beta \models \alpha}, \quad x \notin \mathit{frei}\, X, \alpha \\
\text{hintere Partikulisierung:} & \text{(f)} & \dfrac{X \models \alpha\frac{t}{x}}{X \models \exists x\alpha}, \quad \alpha, \dfrac{t}{x} \text{ kollisionsfrei} \\
 & \text{(g)} & \dfrac{X \models \alpha\frac{y}{x}}{X \models \forall x\alpha}, \quad y \notin \mathit{frei}\, X \cup \mathit{var}\, \alpha
\end{array}
$$

Beweis: Mit der Transitivität von $\models$ folgen direkt (a) aus Korollar 1.1a, (b) aus Korollar 1.1c und (f) aus Korollar 1.1b.
Aus Proposition 2.10i, nämlich $\forall x\beta \models \beta$, folgt (c).
Zu (d): Sei X eine beliebige Formelmenge mit $X \models \alpha$ und $x \notin \mathit{frei}\, X$ und sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell mit $\mathcal{M} \models X$. Dann besagt der Koinzidenzsatz für jedes beliebige $a \in A$, dass $\mathcal{M}_x^a \models X$. Mit der Transitivität folgt daraus und aus $X \models \alpha$, dass $\mathcal{M}_x^\alpha \models \alpha$ für beliebige $a \in A$. Dies ist aber gerade die Definition von $\mathcal{M} \models \forall x\alpha$.
Zu (e): Die Voraussetzung entspricht jener der aussagenlogischen Kontrapositionsregel $X, \beta \models \alpha \implies X, \neg\alpha \models \neg\beta$. Mit (d) folgt daraus $X, \neg\alpha \models \forall x\neg\beta$ und mit erneuter Anwendung der Kontrapositionsregel dann $X, \neg\forall x\neg\beta \models \neg\neg\alpha$. Gemäss dem Ersetzungstheorem ist das wegen $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$ äquivalent zum geforderten $(X, \neg\forall x\neg\beta \models \alpha) =: (X, \exists x\beta \models \alpha)$.
Zu (g): Mit (d) folgt aus $X \models \alpha\frac{y}{x}$ die Relation $X \models \forall y\alpha\frac{y}{x}$ und daraus folgt $X \models \forall x\alpha$ mit der Äquivalenz 2.10m, nämlich $\forall y\alpha\frac{y}{x} \equiv \forall x\alpha$, wann immer $y \notin \mathit{var}\, \alpha$. $\square$

Es folgt eine Definitionskaskade, welche eine intuitive Sprechweise festlegen soll:

Definition 3.2

(a) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathcal{L}$ einer Sprache $\mathcal{L}$ heisst *deduktiv abgeschlossen*, wenn für alle $\alpha \in \mathcal{L}$ gilt, dass $\alpha \in X \Leftrightarrow X \models \alpha$.

(b) Eine *(elementare) Theorie* T, auch eine *Theorie der 1. Stufe in* $\mathcal{L}$ oder eine $\mathcal{L}$*-Theorie* oder eine *Theorie in* $\mathcal{L}$ genannt, sei eine deduktiv abgeschlossene Teilmenge $T \subseteq \mathcal{L}^0$ der Menge aller Aussagen der Sprache $\mathcal{L}$.

(c) Die Symbole T und T' bezeichnen immer eine Theorie in $\mathcal{L}$.

(d) Die nichtlogischen Symbole von $\mathcal{L}$ heissen *die Symbole von* T.

(e) Ist $\alpha \in T$, so sagt man, dass α *in* T *gilt* oder dass α ein *Satz von* T ist.

(f) Falls $T \subseteq T'$, so heisst T eine *Subtheorie* von T' und T' eine *Erweiterung* von T.

Definition 3.3

(a) Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models T$ heisst ein *Modell der* $\mathcal{L}$*-Theorie* T oder kurz ein T*-Modell.*

(b) $Md\,T$ bezeichne die Klasse aller T-Modelle.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models T(\;:\Leftrightarrow$ Für alle Belegungen w gilt: $(\mathcal{A}, w) \models T\;)$ als Modell zu bezeichnen ist eine sinnvolle Erweiterung des Modellbegriffs, da für eine feste Struktur $\mathcal{A}$ die Aussage $(\mathcal{A}, w) =: \mathcal{M} \models T$ unabhängig von w ist, denn T enthält als Theorie nur Aussagen.
Wegen der deduktiven Abgeschlossenheit von Theorien gilt somit $\alpha \in T$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models \alpha$ für alle $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models T$.

Definition 3.4

(a) Sei S eine Aussagenmenge in $\mathcal{L}^0$. Es heisst dann $\langle S \rangle := \{\alpha \in \mathcal{L}^0 | S \models \alpha\}$, nämlich die kleinste in $\mathcal{L}$ deduktiv abgeschlossene Obermenge von S, *die von* S *erzeugte Theorie* oder kurz *die Theorie* S.

(b) Sei T eine Theorie und $X \subseteq \mathcal{L}^0$ eine Aussagenmenge, die T erzeugt, also $T = \langle X \rangle := \{\alpha \in \mathcal{L}^0 | X \models \alpha\}$. Dann heisst X ein *Axiomensystem* für T und die Elemente von X heissen *Axiome.*

Proposition 3.5 *Eine Aussagenmenge $X \subseteq \mathcal{L}^0$ ist genau dann ein Axiomensystem von T, wenn $\mathcal{A} \models T \Leftrightarrow \mathcal{A} \models X$ für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt.*

Beweis:
Erste Hälfte: Sei X ein Axiomensystem von T. Die Implikation $\mathcal{A} \models T \Rightarrow \mathcal{A} \models X$ ergibt sich direkt aus $T \supseteq X$. Zum Nachweis der konversen Implikation $\mathcal{A} \models T \Leftarrow \mathcal{A} \models X$ sei $\mathcal{A}$ eine Struktur mit $\mathcal{A} \models X$ und $\alpha \in T$. Zu zeigen ist $\mathcal{A} \models \alpha$. Wegen $\alpha \in T = \langle X \rangle = \{\alpha \in \mathcal{L}^0 | X \models \alpha\}$ gilt $X \models \alpha$. Wegen der Transitivität von $\models$ folgt aus $\mathcal{A} \models X$ und $X \models \alpha$ wie gewünscht $\mathcal{A} \models \alpha$.

Zweite Hälfte: Es sei $\mathcal{A} \models T \Leftrightarrow \mathcal{A} \models X$ für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$. Daraus ist herzuleiten, dass X ein Axiomensystem von T ist, also $\{\alpha \in \mathcal{L}^0 | X \models \alpha\} =: \langle X \rangle = T$.
Zu $\langle X \rangle \subseteq T$: Sei $\alpha \in \langle X \rangle$, woraus direkt $X \models \alpha$ folgt. Zu zeigen ist $\alpha \in T$, was wegen der deduktiven Abgeschlossenheit von Theorien mit $T \models \alpha$ äquivalent ist. Um $T \models \alpha$ nachzuweisen sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Struktur mit $\mathcal{A} \models T$. Nach Voraussetzung entspricht dies $\mathcal{A} \models X$. Zusammen mit $X \models \alpha$ folgt wegen der Transitivität von $\models$ wie verlangt $\mathcal{A} \models \alpha$.
Zu $\langle X \rangle \supseteq T$: Sei $\alpha \in T$, also $T \models \alpha$ wegen der deduktiven Abgeschlossenheit von T. Es ist nun $\alpha \in \langle X \rangle$ nachzuweisen, was gerade $X \models \alpha$ entspricht. Sei also $\mathcal{A}$ eine Struktur mit $\mathcal{A} \models X$, was nach der Voraussetzung $\mathcal{A} \models T$ entspricht. Wegen $T \models \alpha$ impliziert die Transitivität von $\models$ wiederum $\mathcal{A} \models \alpha$.

$\square$

Definition 3.6

(a) Sei $S \subseteq \mathcal{L}^0$ eine Aussagenmenge. Die Theorie $T + S := \langle T \cup S \rangle$ heisst *die kleinste S enthaltende Erweiterungstheorie von T.*

(b) Seien T und T' zwei Theorien. Existiert eine endliche Aussagenmenge $S \subseteq \mathcal{L}^0$ mit $T + S = T'$, so heisst T' eine *endliche Erweiterung von T.*

Definition 3.7

(a) Wird eine Formel α mit den freien Variablen $v_1, \ldots, v_n$ als Axiom bezeichnet, so stehe α für die generalisierte Formel $\forall v_1 \ldots \forall v_n \alpha$.

(b) Besitzt T ein Axiomensystem, dessen Axiome alle universale Aussagen sind, so heisst T eine *universale Theorie* oder auch *$\forall$-Theorie.*

Universale Theorien sind in $\mathrm{Md}\, T$ nach dem Korollar des Substruktursatzes gegenüber Substrukturen abgeschlossen: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \models T \Rightarrow \mathcal{A} \models T$.

Definition 3.8

(a) Die kleinste Theorie in $\mathcal{L}$, nämlich die Theorie mit dem Axiomensystem $\emptyset$, werde als $Taut_{\mathcal{L}}$ oder einfach $Taut$ notiert.

(b) Die grösste Theorie in $\mathcal{L}$, nämlich die Theorie $\mathcal{L}^0$, bezeichnet man als *die inkonsistente Theorie.*

(c) Jede von der grössten Theorie verschiedene Theorie in $\mathcal{L}$ nennt man *konsistent* oder *erfüllbar.*

(d) Zwei Theorien T und T' heissen *miteinander verträglich*, wenn $T+T'$ konsistent ist.

Definition 3.9

(a) Sei $\alpha \in \mathcal{L}^0$ eine Aussage. Die Theorie $T + \alpha := \langle T \cup \{\alpha\}\rangle$ heisst *die kleinste α enthaltende Erweiterungstheorie von T.*

(b) Eine Aussage α heisst *erfüllbar in T* oder *verträglich* oder *konsistent mit T*, wenn $T + \alpha$ erfüllbar ist.

(c) Eine Aussage α heisst *unabhängig von T*, wenn sowohl α als auch $\neg\alpha$ in T erfüllbar ist.

Das klassisches Beispiel ist die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von der so genannten absoluten Geometrie. Diese wird durch das Parallelenaxiom gerade zur bekannten ebenen Geometrie erweitert.
Ein zweites Beispiel ist die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese von den Axiomen der Mengenlehre.

Proposition 3.10 *Der Durchschnitt $T := \bigcap_{i\in I} T_i$ einer jeden nichtleeren Familie von Theorien T_i ist wieder eine Theorie.*

Beweis: Zu zeigen ist die deduktive Abgeschlossenheit. Sei also $\alpha \in \mathcal{L}^0$ eine beliebige Aussage mit $T \models \alpha$, dann gilt für alle $i \in I$ auch $T_i \models \alpha$ und somit $\alpha \in T_i$. Dies besagt aber gerade $\alpha \in \bigcap_{i\in I} T_i =: T$. □

Definition 3.11

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur. Die Theorie $Th\mathcal{A} := \{\alpha \in \mathcal{L}^0 \mid \mathcal{A} \models \alpha\}$ heisst *die (elementare) Theorie der Struktur $\mathcal{A}$.*

(b) Sei $\boldsymbol{K}$ eine nichtleere Klasse von Strukturen. Es heisst $Th\boldsymbol{K} := \bigcap\{Th\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \in \boldsymbol{K}\}$ dann *die (elementare) Theorie der Klasse $\boldsymbol{K}$.*

(c) Die Notation $Th\boldsymbol{K} \models \alpha$ stehe für $\alpha \in Th\boldsymbol{K}$, also dafür, dass $\mathcal{A} \models \alpha$ für alle $\mathcal{A} \in \boldsymbol{K}$ gilt.

Proposition 3.12 *Eine Theorie T ist genau dann maximal konsistent, wenn sie von der Form $Th\mathcal{A}$ für eine Struktur $\mathcal{A}$ ist.*

Beweis:
Erste Hälfte: Sei T eine maximal konsistente Theorie. Wegen der Konsistenz existiert eine Modell $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models T$. Also gilt $T \subseteq \{\alpha \in \mathcal{L}^0 \mid \mathcal{A} \models \alpha\} =: Th\mathcal{A}$. Weil auch $Th\mathcal{A}$ konsistent ist, muss wegen der Maximalität von T Gleichheit gelten: $T = \mathrm{Th}\mathcal{A}$

Zweite Hälfte: Sei $Th\mathcal{A} := \{\alpha \in \mathcal{L}^0 \mid \mathcal{A} \models \alpha\}$ die Theorie einer Struktur $\mathcal{A}$. Diese Theorie ist konsistent, denn ein Modell $(\mathcal{A}, w)$ mit einer beliebigen Belegung w erfüllt die Formelmenge $Th\mathcal{A}$. Zu zeigen bleibt, dass $Th\mathcal{A}$ maximal konsistent ist. Sei also T eine beliebige echte Erweiterung von $Th\mathcal{A}$ und sei $\alpha \in T \setminus Th\mathcal{A}$ irgendeine der zusätzlichen Aussagen. Dann gilt nach der Definition von $Th\mathcal{A}$ aber $\mathcal{A} \not\models \alpha$, also $\mathcal{A} \models \neg\alpha$ und damit $\neg\alpha \in Th\mathcal{A} \subset T$. Somit ist T wegen $\alpha, \neg\alpha \in T$ inkonsistent.

□

Literatur

[1] Rautenberg, Wolfgang. Einführung in die Mathematische Logik. Ein Lehrbuch. 3., überarbeitete Auflage. Vieweg-Teubner 2008^3.