Mathematische Logik

Spracherweiterung

Sara Svaluto-Ferro

21. März 2012

Der folgende Vortrag stützt sich auf den Abschnitt 2.6 aus *Einführung in die Mathematische Logik* von Wolfgang Rautenberg [1].

In diesem Skript wird die syntaktische und semantische Terminologie der Prädikatenlogik benutzt. Insbesondere bezeichne $\mathcal{L}$ (bzw $\mathcal{L}'$) die Sprache bestimmt durch die nichtlogische Signatur L (bzw L'), r ein Relationssymbol, f ein Operationssymbol, α, β beliebigen Formeln und T eine Theorie. Es gelte zusätzlich, dass $L \subseteq L'$ und damit $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

Einführung

Die deduktive Entwicklung einer Theorie geht fast immer Hand in Hand mit schrittweise vorgenommenen Spracherweiterungen. Aus diesem Grund ist es interessant, die bis jetzt betrachteten Themen in dieser Richtung zu erweitern.

Als erstes definieren wir, was eine Spracherweiterung einer Sprache $\mathcal{L}$ ist.

Definition 0.1. Mit *Spracherweiterung von* $\mathcal{L}$ bezeichnet man eine zweite Sprache $\mathcal{L}'$, deren nichtlogische Signatur L' diejenige von $\mathcal{L}$ enthält. Zusätzlich dazu müssen die Variablen von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ übereinstimmen. Für $K := L' \backslash L$, sprechen wir von einer *Spracherweiterung von* $\mathcal{L}$ *um* K.

Sehr wichtig für diesen Vortrag ist auch die folgende Definition.

Definition 0.2. Sei T eine Theorie in $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ irgendeine Spracherweiterung von $\mathcal{L}$ und $T' \supseteq T$ irgendeine Theorie in $\mathcal{L}'$. Man nennt T' eine *konservative Erweiterung von* T, wenn

(1) $$T' \cap \mathcal{L} = T.$$

Zuletzt definieren wir eine neue Variante der Variablensubstitution, die nützlich für die Beweise dieses Vortrages ist.

Definition 0.3. Sei S eine endliche Teilmenge der Variablen Var von $\mathcal{L}$ und $\varphi \in \mathcal{L}$ eine beliebige Formel. Man definiert $\varphi^{(S)}$ durch Formelinduktion wie folgt:

- Ist α eine Primformel, setze $\alpha^{(S)} := \alpha$.
- $(\alpha \wedge \beta)^{(S)} := \alpha^{(S)} \wedge \beta^{(S)}$.
- $(\neg\alpha)^{(S)} := \neg\alpha^{(S)}$.
- Ist $x \notin S$, setze $(\forall x\alpha)^{(S)} := \forall x\alpha^{(S)}$. Andernfalls setze $(\forall x\alpha)^{(S)} := \forall y(\alpha\frac{y}{x})^{(S)}$, wobei $y \in Var$ weder in S noch in α vorkommt.

In andern Worten ist $\varphi^{(S)}$ *die zu* φ *äquivalente Formel, die entsteht, wenn alle in* φ *vorkommenden gebundenen Variablen in* S *durch solche "anwendbare" neue Variablen ersetzt werden.*

1 Erweiterung um Relationssymbole

Ein praktisches Beispiel zur Anwendbarkeit von Spracherweiterungen, ist die Entwicklung der elementaren Zahlentheorie. Tatsächlich ist die Einführung des Teilbarkeitsrelationssymbols durch die Definition

$$x \mid y \leftrightarrow \exists z\ x \cdot z = y$$

gewiss von Vorteil.

Definition 1.1. Sei r ein n-stelliges Relationssymbol in $L' \backslash L$. Eine *explizite Definition von* r *in* $\mathcal{L}$ ist eine Formel der Gestalt

$$\eta_r : r\vec{x} \leftrightarrow \delta(\vec{x}) \qquad (x_1, \ldots, x_n \text{ paarweise verschieden}), \tag{2}$$

mit $\delta(\vec{x}) \in \mathcal{L}$ der *definierenden Formel.*

Definition 1.2. Sei T eine Theorie in $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}[r]$ die Spracherweiterung von $\mathcal{L}$ um r. Weiter sei η_r eine explizite Definition von f in $\mathcal{L}$. Eine *definitorische Erweiterung von* T *um* r ist eine Theorie in $\mathcal{L}[r]$, definiert durch

$$T_r := \langle T \cup \{\eta_r^{\forall}\}\rangle \tag{3}$$

wobei $\langle T \cup \{\eta_r^{\forall}\}\rangle$ die kleinste T und $\eta_r^{\forall}$ enthaltende Theorie in $\mathcal{L}[r]$ bezeichnet. [1]

[1] Hier wird T auf natürliche Weise als Menge von Aussagen von $\mathcal{L}[r]$ gesehen.

Weiter ist für jedes $\varphi \in \mathcal{L}[r]$ die *Reduzierte* $\varphi^{rd} \in \mathcal{L}$ *von* φ wie folgt erklärt: Jede in φ vorkommende und mit r beginnende Primformel $r\vec{t}$ wird durch $\delta^{(S_{\vec{t}})}(\vec{t})$ ersetzt, wobei $S_{\vec{t}} :=$ {alle in $\vec{t}$ vorkommende Variablen}.

Man zeigt mittels des folgenden Satzes, dass T_r eine konservative Erweiterung von T ist.

Satz 1.3 (Eliminationssatz)**.**
Sei T eine Theorie in $\mathcal{L}$ und $T_r \subseteq \mathcal{L}[r]$ ihre definitorische Erweiterung um die explizite Definition (vom Relationssymbol r in $\mathcal{L}$) $r\vec{x} \leftrightarrow \delta(\vec{x})$.
Dann gilt für alle Formeln $\varphi \in \mathcal{L}[r]$

$$T_r \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad T \models \varphi^{rd}. \tag{4}$$

Falls $\varphi \in \mathcal{L}$ gilt insbesondere

$$T_r \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad T \models \varphi, \tag{5}$$

weil dann $\varphi^{rd} = \varphi$, und falls $\varphi \in \mathcal{L}^0$ bzw $\mathcal{L}[r]^0$ (d.h. φ ist eine Aussage)

$$\varphi \in T_r \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in T \qquad bzw \tag{6}$$

$$\varphi \in T_r \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{rd} \in T \tag{7}$$

wegen der deduktiven Abgeschlossenheit von T_r bzw T.
Kurzum, T_r ist eine konservative Erweiterung von T.

Beweis. Jedes Modell $\mathcal{A}$ von T (d.h eine $\mathcal{L}$-Struktur mit $\mathcal{A} \models T$) kann durch die Erklärung $r^{\mathcal{A}'}\vec{a} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \delta[\vec{a}]$ zu einem Modell $\mathcal{A}'$ von T_r (d.h. eine $\mathcal{L}[r]$-Struktur mit $\mathcal{A}' \models T_r$) mit gleichem Träger expandiert werden.
Genauer sei $L_r = L \cup \{r\}$ die nichtlogische Signatur von $\mathcal{L}[r]$. Dann haben die Symbole von $L_r^{\mathcal{A}'} \backslash \{r^{\mathcal{A}'}\}$ dieselbe Bedeutung wie diejenigen in $L^{\mathcal{A}}$. Zusätzlich wird $r^{\mathcal{A}'}$ definiert durch die Erklärung $r^{\mathcal{A}'}\vec{a} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \delta[\vec{a}]$.

Da $r\vec{t} \equiv_{T_r} \delta^{(S_{\vec{t}})}(\vec{t})$ für alle Termfolgen $\vec{t}$, gilt $\varphi \equiv_{T_r} \varphi^{rd}$ für alle $\varphi \in \mathcal{L}[r]$ wegen dem Ersetzungstheorem. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
T_r \models \varphi &\Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi \text{ für alle } \mathcal{A} \models T && (\text{weil } \mathrm{Md}T_r = \{\mathcal{A}' \mid \mathcal{A} \models T\})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi^{rd} \text{ für alle } \mathcal{A} \models T && (\text{weil } \varphi \equiv_{T_r} \varphi^{rd})\\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^{rd} \text{ für alle } \mathcal{A} \models T && (\text{Koinzidenzsatz})\\
&\Leftrightarrow T \models \varphi^{rd}.
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung ist $\mathrm{Md}T_r$ die Menge aller Modelle von T_r, die als Strukturen betrachtet werden können, weil Belegungen für die Erfüllung von Aussagen belanglos sind. Die Menge $\{\mathcal{A}' \mid \mathcal{A} \models T\}$ besteht aus allen Strukturen $\mathcal{A}'$, die aus einem Modell $\mathcal{A}$ von T erweitert worden sind. Die Erklärung $r^{\mathcal{A}'}\vec{a} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \delta[\vec{a}]$ garantiert, dass diese zwei Mengen übereinstimmen.
Die Voraussetzungen des Koinzidenzsatzes sind erfüllt, weil für jede Belegung ω die Modelle $(\mathcal{A}, \omega)$ bzw $(\mathcal{A}', \omega)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$
\begin{aligned}
x^{(\mathcal{A},\omega)} &= x^{(\mathcal{A}',\omega)} && \text{für alle } x \in Var^{\mathcal{L}} = Var^{\mathcal{L}'} \\
\zeta^{\mathcal{A}} &= \zeta^{\mathcal{A}'} && \text{für alle } \zeta \in L
\end{aligned}
$$

□

2 Erweiterungen um Operationssymbole und um Konstantensymbole

Da jedes Konstantensymbol zugleich ein 0-stelliges Operationssymbol ist, genügt es die Einführung von neuen Operationssymbolen in eine Theorie zu betrachten.

Definition 2.1. Sei f ein n-stelliges Operationssymbol in $L' \backslash L$. Eine *explizite Definition von f in $\mathcal{L}$* ist eine Formel der Gestalt

(8) $\quad \eta_f : y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \delta(\vec{x}, y) \qquad (y, x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden),

mit $\delta(\vec{x}, y) \in \mathcal{L}$ der *definierenden Formel.*
Im Falle $n = 0$, d.h falls f ein Konstantensymbol ist, schreibt man c für f und nennt dann

(9) $$\eta_c : y = c \leftrightarrow \delta(y)$$

explizite Definition des Konstantensymbols c in $\mathcal{L}$.
Falls

(10) $$T \models \forall\vec{x}\exists! y\delta \quad (\text{bzw } T \models \exists! y\delta)$$

heisst die Formel η_f (bzw η_c) *legitim* in $T \subseteq \mathcal{L}$.

Definition 2.2. Sei T eine Theorie in $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}[f]$ die Spracherweiterung von $\mathcal{L}$ um f. Weiter sei η_f eine legitime explizite Definition von f in $\mathcal{L}$. Analog zu Relationssymbolen nennt man die Theorie in $\mathcal{L}[f]$ definiert durch

$$T_f := \langle T \cup \{\eta_f^{\forall}\}\rangle \tag{11}$$

eine *definitorische Erweiterung von T um f.*

Der Eliminationssatz 1.3 gilt analog für legitime definitorische Erweiterungen um Operations- bzw Konstantensymbole.

Um diesen zu beweisen, braucht man für jede Formel φ (in der jeweiligen Spracherweiterung) eine Definition von Reduzierte φ^{rd} ($\in \mathcal{L}$), die äquivalent zu φ in T_f ist. Man konstruiert diese Formel durch Formelinduktion. Sei $\delta(\vec{x}, y) \in \mathcal{L}$ eine definierende Formel von f in $\mathcal{L}$.

- Ist α eine Primformel, wobei f in α nicht vorkommt, setze $\alpha^{rd} := \alpha$.
- Falls α eine Primformel ist, wobei f in α vorkommt, hat α die Gestalt $\alpha_0\frac{f\vec{t}}{z}$ für eine geeignete Primformel α_0 und eine Termfolge $\vec{t}$. Im Falle dass f mehr als einmal in α vorkommt, wählt man $\vec{t}$ so, dass $\{t_1, \ldots, t_n\}$ die Argumente des ersten Auftretens von f in α sind. Sei $S := \{z\} \cup \{$alle in $\vec{t}$ vorkommende Variablen$\}$, dann definiert man die Reduzierte von α rekursiv durch

  $$\alpha^{rd} := \exists z \left(\alpha_0^{rd} \wedge \left(\delta^{(S)}\frac{\vec{t}\ z}{\vec{x}\ y}\right)\right).$$

  Beachte, dass α_0 wiederum eine Primformel ist, in der f wenigere Male als in α vorkommt.
- $(\alpha \wedge \beta)^{rd} := \alpha^{rd} \wedge \beta^{rd}$.
- $(\neg\alpha)^{rd} := \neg\alpha^{rd}$.
- $(\forall x\alpha)^{rd} := \forall x\alpha^{rd}$.

Mit dieser Definition kann man den Beweis des Eliminationssatzes für Relationssymbole Schritt für Schritt wiederholen.

3 Allgemeine Erweiterungen

All diese Begriffe können zu einer allgemeinen Diskussion über Spracherweiterungen zusammengeführt werden. Man betrachte irgendeine Spracherweiterung $\mathcal{L}^*$ von $\mathcal{L}$ um eine beliebige Liste K^* von nichtlogischen Symbolen in $L' \backslash L$.

Definition 3.1. Sei T eine Theorie in $\mathcal{L}$. Eine *definitorische Erweiterung von T* ist eine Theorie $T^* \subseteq \mathcal{L}^*$ definiert durch

$$T^* := \langle T \cup \Delta \rangle \tag{12}$$

wobei Δ eine Liste von verallgemeinerten expliziten Definitionen von K^* in $\mathcal{L}$ ist, so dass die definierenden Formeln der Operationssymbole und Konstantensymbole legitim in T sind. [2]

Weiter wird für jede Formel $\varphi \in \mathcal{L}^*$ die Reduzierte $\varphi^{rd} \in \mathcal{L}$ von φ wie oben konstruiert.

Genauer sei ζ ein Symbol in Δ, $\mathcal{L}^\bullet$ die Sprache bestimmt durch die nichtlogische Signatur $L \cup K^* \backslash \{\zeta\}$ und η_ζ eine (legitime) explizite Definition von ζ in $\mathcal{L}^\bullet$. Dann ist T^* eine definitorische Erweiterung von $T^\bullet$ um ζ, wobei $T^\bullet := \langle T \cup \Delta \backslash \{\eta_\zeta\} \rangle$, und wir können die Reduzierte $\varphi^{\bullet rd} (\in \mathcal{L}^\bullet)$ von φ wie in den vorherigen Abschnitten definieren. Indem man diese Vorgehensweise wiederholt, kann man die Reduzierte $\varphi^{rd} \in \mathcal{L}$ konstruieren.

Satz 3.2 (allgemeiner Eliminationssatz)**.** *Sei T eine Theorie in $\mathcal{L}$ und $T^* \subseteq \mathcal{L}^*$ eine definitorische Erweiterung von T.*
Dann gilt für jede Aussage φ von $\mathcal{L}^*$

$$\varphi \in T^* \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{rd} \in T \tag{13}$$

und weiter ist T^* eine konservative Erweiterung von T.

Beweis. Wie vorhin kann man mit der obigen Definition von Reduzierte, den Beweis des Eliminationssatz für Relationssymbole Schritt für Schritt wiederholen.

□

Literatur

[1] Wolfgang Rautenberg. *Einführung in die Mathematische Logik*. Vieweg-Teubner, 2008. 3, überarbeitete Auflage.

[2] Wir betrachten den Fall mit endlichem K^*, aber man kann diese Definition und den nachfolgenden allgemeinen Eliminationssatz auf den nicht-endlichen Fall verallgemeinern.