Mathematische Logik
Zermelo-Fränkel Axiome der Mengenlehre

Laura Casalena

28.März 2012

Dieses Skript stützt sich auf das Kapitel 3 aus *Einführung in die Mengenlehre* von Heinz-Dieter Ebbinghaus [1].
In diesem Vortrag werde ich die Axiome von Zermelo-Fraenkel vorstellen und dann einige wichtige Begriffe der Mathematik definieren, insbesondere Relationen, das kartesische Produkt und den Funktionsbegriff.
Die Zermelo-Fraenkel Mengenlehre wurde nach Ernst Zermelo (1891-1965) und Abraham Adolf Fraenkel (1891-1965) benannt. Heute ist sie Grundlage fast aller Zweige der Mathematik. Die Axiome von Zermelo-Fraenkel (**ZFC**):

- *Existenzaxiom* (**Ex**):
$$\exists x \; x = x$$
- *Extensionalitätsaxiom* (**Ext**):
$$\forall xy \, (\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$
- *Schema der Aussonderungsaxiome* (**Aus**): Zu jeder Formel $\varphi\,(z, \vec{x})$ enthält das Schema das Axiom:
$$\forall \vec{x} \; \forall x \; \exists y \; \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi\,(z, \vec{x}))$$
(Bemerkung: mit **Aus** bezeichnen wir die Menge der Schemata.)
- *Kleines Vereinigungsmengenaxiom* ($\cup$-**Ax**):
$$\forall xy \; \exists w \; \forall z \, (z \in x \vee z \in y \rightarrow z \in w)$$
- *Grosses Vereinigungsmengenaxiom* ($\bigcup$-**Ax**):
$$\forall X \; \exists y \; \forall x \; z \, (x \in X \wedge z \in x \rightarrow z \in y)$$
- *Potenzmengenaxiom* (**Pot**):
$$\forall x \; \exists y \; \forall z \, (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

- *Unendlichkeitsaxiom* (**Inf**):

$$\exists x \Big(\text{"}\emptyset \in x\text{"} \wedge \forall z \, (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x) \Big)$$

(Notation: wir schreiben "$\emptyset \in x$" für $\forall y \Big(\forall z \, (z \in y \rightarrow z \neq z) \rightarrow y \in x \Big))$

- *Schema der Ersetzungsaxiome* (**Ers**): Zu jeder Formel $\varphi(x, y, \vec{x})$ enthält das Schema das Axiom:

$$\forall \vec{x} \Big(\forall x \; \exists^{=1} y \; \varphi(x, y, \vec{x}) \rightarrow \forall u \; \exists v \; \forall xy \, (x \in u \wedge \varphi(x, y, \vec{x}) \rightarrow y \in v) \Big)$$

(Bemerkung: mit **Ers** bezeichnen wir die Menge der Schemata.)

- *Fundierungsaxiom* (**Fund**):

$$\forall X \Big(\text{"}X \neq \emptyset\text{"} \rightarrow \exists x \, (x \in X \wedge \neg \exists y \, (y \in X \wedge y \in x)) \Big),$$

d.h.:

$$\forall X \Big(\text{"}X \neq \emptyset\text{"} \rightarrow \exists x \, (x \in X \wedge \text{"}x \cap X = \emptyset\text{"}) \Big)$$

(Notation: wir schreiben "$X = \emptyset$" für $\nexists y \; y \in x$, und "$X \neq \emptyset$" für $\neg \, (\nexists y \; y \in x))$

- *Auswahlaxiom* (**AC**, **A**xiom of **C**hoice):

$$\forall X \Big(\forall xy \, (x \in X \wedge y \in X \rightarrow x \neq \emptyset \wedge (x = y \vee x \cap y = \emptyset)) \\ \rightarrow \exists Y \; \forall x \, (x \in X \rightarrow \exists z \; Y \cap x = \{z\}) \Big)$$

Ein Universum $\mathcal{A} = (A, \in)$ von "Mengen", welches die Axiome von **ZFC** erfüllt, hat folgende Eigenschaften, welche wir mit den entsprechenden Axiomen nennen (bemerke, dass a, b, c, d Elemente von $\mathcal{A}$ bezeichnen):

- **(Ex)**: Es gibt eine Menge, d.h. $A \neq \emptyset$ (Bemerkung: nach unserer Definition einer Struktur ist es eigentlich unnötig, dieses Axiom zu fordern).
- **(Ext)**: Umfangsgleiche Mengen sind gleich.
- **(Aus)**: Zu jeder Formel $\varphi(z, \vec{x})$ gilt im Universum A: Zu allen $a_1, \ldots, a_n$ und jedem a gibt es ein b, so dass: $c \in b \leftrightarrow c \in a \wedge \varphi(c, a_1, \ldots, a_n)$.
- **($\cup$-Ax)**: Zu je zwei Mengen a_1 und a_2 gibt es eine Menge, die alle Elemente von a_1 und a_2 enthält.
- **($\bigcup$-Ax)**: Zu jeder Menge a gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von a enthält.

- **(Pot)**: Zu jeder Menge a gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von a enthält.
- **(Inf)**: Es gibt eine Menge, die die leere Menge enthält und mit jedem c auch $c \cup \{c\}$.
- **(Ers)**: Zu jeder Formel $\varphi(x, y, \vec{x})$ gilt im Universum A: Für alle $a_1, \ldots, a_n$: Wenn es zu jedem c_1 genau ein c_2 gibt mit $\varphi(c_1, c_2, a_1, \ldots, a_n)$, so gibt es zu jedem a ein b, das zu jedem $a_1 \in a$ das a_2 mit $\varphi(c_1, c_2, a_1, \ldots, a_n)$ enthält.
- **(Fund)**: Jede nicht leere Menge besitzt ein $\in$-minimales Element (Bemerkung: mit diesem Axiom kann man die Existenz von Zyklen $a_0 \in a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1} \in a_n \wedge a_n \in a_0$ ausschliessen).
- **(AC)**: Zu jeder Menge a von nicht leeren, zueinander disjunkten Mengen gibt es eine Menge b, die von jedem Element von a genau ein Element enthält.

Wir definieren $\mathbf{Z}^0$=**Ex**+**Ext**+**Aus**+$\cup$**-Ax**+$\bigcup$**-Ax**+**Pot**+**Inf**. Die Axiome von $\mathbf{Z}^0$ bilden das Zermelosche Axiomensystem der Mengenlehre ohne Auswahlaxiom und ohne Fundierungsaxiom. In meinem Vortrag werde ich nur $\mathbf{Z}^0$ betrachten, welches genug ist, um das kartesische Produkt und den Funktionsbegriff zu definieren.

Zur Notation: mit $\mathcal{A} = (A, \in)$ werden wir im folgenden eine Struktur bezeichnen, welche $\mathbf{Z}^0$ (oder eine Teilmenge dieser Axiomen) erfüllt, i.e. $\mathcal{A} \models \mathbf{Z}^0$.

1 Zur Extensionalität und Aussonderung

Existenzaxiom (Ex) *Es gibt eine Menge, i.e.:* $\exists x\ x = x$.

Dieses Axiom besagt, dass das Universum (eine gegebene Welt von Mengen) nicht leer ist.

Extensionalitätsaxiom (Ext)

Umfangsgleiche Mengen sind gleich, i.e: $\forall xy\,(\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.

Bemerke, dass man mit diesem Axiom Mengen nur unter quantitativen Gesichtspunkten betrachtet.

Definiere $x \subseteq y := \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y)$.

Satz 1.1. *Ext* $\models \forall xy\,(x \subseteq y \wedge y \subseteq x \rightarrow x = y)$.

Man verwendet diesen Satz, um die Gleichheit von Mengen in einem Universum zu beweisen.

Bemerkung 1.2. Für $x \in y$ sagen wir *x ist Element von y*; für $x \subseteq y$ sagen wir *x ist Teilmenge von y.*

Schema der Aussonderungsaxiome (Aus)

Zu jeder Formel $\varphi(z, \vec{x})$ enthält das Schema das Axiom:

$$\forall \vec{x}\ \forall x\ \exists y\ \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \vec{x}))\,.$$

In Termen von Mengen: Zu jeder Formel $\varphi(z, \vec{x})$ gilt im Universum A: Zu allen $a_1, \dots, a_n$ und jedem a gibt es ein b, so dass: $c \in b \leftrightarrow c \in a \wedge \varphi(c, a_1, \dots, a_n)$.

Falls b die Bedingung $\forall c\, (c \in b \leftrightarrow c \in a \wedge \varphi(c, a_1, \dots, a_n))$ erfüllt, dann ist b nach **Ext** eindeutig bestimmt. Es folgt deshalb diesen Satz, der **Aus** verstärkt:

Satz 1.3. *Zu allen $a_1, \dots, a_n$ und allen $a \in A$ gibt es genau ein b ($\in A$), das gerade diejenigen Elemente c von a enthält, für die $\varphi(c, a_1, \dots, a_n)$ gilt. In Formeln:*

$$Ext, Aus \models \forall\ \vec{x}\ \forall x\ \exists^{=1}\ y\ \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \vec{x})) \tag{1}$$

Bemerkung 1.4. Das Schema **Aus** enthält unendlich viele Axiome. Es folgt, dass das Axiomensystem von Zermelo und Fränkel unendlich ist.

Satz 1.5. *Für alle $a \in A$ ist $c := \{b \in a \mid b \notin b\} \notin a$. In der logischen Sprache:*

$$Ext, Aus \models \forall x \Big(\forall y\, (\forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \notin z)) \to y \notin x \Big). \tag{2}$$

Beweis. Die Menge c ist wohldefiniert, denn es gilt:

$$Aus \models \forall x\ \exists y\ \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \notin z)$$

Nehme an, dass $c \in a$. Es gilt, dass $c \in c$ oder $c \notin c$. Falls $c \in c$ ist $c \notin c$; falls $c \notin c$ ist $c \in c$. Wir erhalten, dass $c \in c$ nur genau dann, wenn $c \notin c$. Das ist nicht möglich. Also ist $c \notin a$. $\square$

Aus obigem Satz folgt:

Korollar 1.6. *Für alle Mengen a gibt es eine Menge, die nicht in a enthalten ist. Also gibt es keine Menge, die alle Mengen enthält. In der logischen Sprache: $Ext, Aus \models \nexists x\ \forall y\ y \in x$.*

Definition 1.7 (Die leere Menge)**.** Sei $a \in A$. Wir definieren $\emptyset := \emptyset_{\mathcal{A}} := \{b \in a \mid b \neq b\}$. Diese Menge heisst die *leere Menge*; sie ist wohldefiniert und eindeutig bestimmt, denn es gilt:

$$Ext, Aus \models \forall x \; \exists^{=1} \; y \; \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge z \neq z) \, .$$

Definition 1.8 (Durchschnitt zweier Mengen a_1 und a_2)**.** Zu jedem a_1 und $a_2 \in A$ existiert die Menge $a_1 \cap a_2 := \forall c \, (c \in a_1 \wedge c \in a_2)$, denn nach **Aus**:

$$Aus \models \forall x_1 \forall x_2 \; \exists y \; \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in x_1 \wedge z \in x_2) \, .$$

Seien a_1, a_2, a_3 und $a \in A$. Es gilt:

- die Kommutativität: $a_1 \cap a_2 = a_2 \cap a_1$
- die Assoziativität: $(a_1 \cap a_2) \cap a_3 = a_1 \cap (a_2 \cap a_3)$
- $a \cap \emptyset = \emptyset$

Definition 1.9 (Durchschnitt aller Elemente einer Menge a)**.**
Falls $a \in A$ eine nicht-leere Menge von nicht-leeren Mengen ist, gibt es ein $b \in a$ (nicht-leer). Wir definieren die Menge $\bigcap a := \{c \in b \mid \forall d \, (d \in a \rightarrow c \in d)\}$. Sie ist wohldefiniert, denn es gilt:

$$Aus \models \forall X \; \forall x \; \exists y \; \forall z \Big(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \forall w \, (w \in X \rightarrow z \in w) \Big).$$

Falls $a \in A$ leer ist, definieren wir $\bigcap a := \emptyset$.

Definition 1.10 (Mengentheoretische Differenz zweier Mengen a und b)**.** Zu jedem a und $b \in A$ existiert die Menge $a \setminus b := \forall c \, (c \in a \wedge c \notin b)$, denn nach **Aus**:

$$Aus \models \forall x_1 \forall x_2 \; \exists y \; \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in x_1 \wedge z \notin x_2) \, .$$

2 Zu den Axiomen der Mengenvereinigung

Im Kapitel 1 haben wir aus **Ex**, **Ext** und **Aus** die Existenz des Durchschnitts und der mengentheoretischen Differenz bewiesen, nicht aber die Existenz der Vereinigung zweier Mengen.

Beispiel 2.1. Betrachte das Universum $A_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Die Trägermenge A_0 erfüllt **Ext** und **Aus**, nicht aber $\cup$-**Ax**. Also: $\{\mathbf{Ext}, \mathbf{Aus}\} \not\models \cup$-**Ax**. Nach dem Vollständigkeitssatz (den wir später behandeln werden): $\{\mathbf{Ext}, \mathbf{Aus}\} \not\models \cup$-**Ax** $\rightarrow \{\mathbf{Ext}, \mathbf{Aus}\} \nvdash \cup$-**Ax**. Deshalb ist $\cup$-**Ax** nicht aus **Ext** und **Aus** beweisbar.

Kleines Vereinigungsmengenaxiom ($\cup$-Ax)

Zu je zwei Mengen a_1 und a_2 gibt es eine Menge, die alle Elemente von a_1 und a_2 enthält., i.e.:

$$\forall xy\ \exists w\ \forall z\, (z \in x \vee z \in y \to z \in w)\,.$$

Definition 2.2 (Vereinigungsmenge von a und b)**.** Seien a_1 und a_2 Mengen. Nach $\cup$**-Ax** gibt es eine Menge b, so dass $\forall c \in a_1\ \forall c \in a_2 \to c \in b$. Wir definieren die Menge $a_1 \cup a_2 := \{a \in b \mid a \in a_1 \vee a \in a_2\}$. Sie existiert, denn:

$$\cup - Ax, Aus \models \forall x_1\ \forall x_2\ \forall x\ \exists y\ \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge (z \in x_1 \vee z \in x_2))\,.$$

Seien a_1, a_2, a_3 und $a \in A$. Es gilt:

- die Kommutativität: $a_1 \cup a_2 = a_2 \cup a_1$
- die Assoziativität: $(a_1 \cup a_2) \cup a_3 = a_1 \cup (a_2 \cup a_3)$
- $a \cup \emptyset = a$

Grosses Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax)

Zu jeder Menge a gibt es eine Menge, die alle Elemente der Elemente von a enthält., i.e.:

$$\forall X\ \exists y\ \forall xz\, (x \in X \wedge z \in x \to z \in y)\,.$$

Definition 2.3 (Vereinigungsmenge von a)**.** Falls a eine nicht-leere Menge von nicht-leeren Mengen ist, gibt es nach $\bigcup$**-Ax** eine Menge d, so dass $\forall b \in a\, (c \in b \to c \in d)$. Wir definieren die Menge $\bigcup a := \{c \in d \mid \exists b\, (b \in a \wedge c \in b)\}$. Sie existiert, denn es gilt:

$$\bigcup -Ax, Aus \models \forall x\ \forall X\ \exists y\ \forall z \Big(z \in y \leftrightarrow z \in X \wedge \exists w\, (w \in x \wedge z \in w) \Big).$$

Die *Vereinigungsmenge von a* besteht genau aus den Elementen der Elementen von a. Falls $a \in A$ leer ist, definieren wir $\bigcup a := \emptyset$.

Bemerkung 2.4 (Distributivgesetze)**.** Seien a_1, a_2 und $a_3 \in A$. Es gilt:

- $(a_1 \cup a_2) \cap a_3 = (a_1 \cap a_3) \cup (a_2 \cap a_3)$
- $(a_1 \cap a_2) \cup a_3 = (a_1 \cup a_3) \cap (a_2 \cup a_3)$

Bemerkung 2.5. Man kann statt $\cup$**-Ax** (das kleine Vereinigungsmengenaxiom) das sogenannte *Paarmengenaxiom* (**Pa**) wählen, in Worten:

Zu je zwei Mengen a und b gibt es eine Menge, die a und b als Elemente entält.

Seien a und b Mengen. Nach dem Paarmengenaxiom existiert eine Menge d, die a und b als Elemente enthält. Wir definieren die Menge $\{a, b\} := \{c \in d \mid c = a \vee c = b\}$, die sogenannte *Paarmenge von a und b* (die genau a und b enthält). Sie ist wohldefiniert, denn es gilt:

$$Pa, Aus \models \forall x_1 \, \forall x_2 \, \forall y \, \exists w \, \forall z \Big(z \in w \leftrightarrow z \in y \wedge (z = x_1 \vee z = x_2) \Big).$$

Aus dem Paarmengenaxiom, **Aus** und $\bigcup$**-Ax** kann man $\cup$**-Ax** beweisen, denn für a und b ist $\bigcup\{a, b\}$ offenbar gerade deren Vereinigung.

Bemerke auch, dass mit dem *Potenzmengenaxiom*, das wir im nächsten Kapitel betrachten werden, das Paarmengenaxiom beweisbar ist.

3 Das Potenzmengenaxiom

Sei a eine Menge. Mit den bisherigen Axiomen kann man nicht die Existenz einer Menge beweisen, die alle Teilmengen von a enthält. Wir brauchen also ein neues Axiom.

Potenzmengenaxiom (Pot)

Zu jeder Menge a gibt es eine Menge, die alle Teilmengen von a enthält, i.e:

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \subseteq x \rightarrow z \in y) \, .$$

Nach Anwendung einer geeigneten Aussonderung erhalten wir zu jeder Menge $a \in A$ die Menge aller Teilmengen von a.

Definition 3.1 (Potenzmengenoperation)**.** Sei $a \in A$ eine Menge. Nach **Pot** gibt es eine Menge c, die alle Teilmengen von a enthält. Wir definieren die Menge $Pot\,(a) := \{b \in c \mid b \subseteq a\}$. Sie existiert, denn es gilt:

$$Pot, Aus \models \forall x \, \forall w \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in w \wedge z \subseteq x) \, .$$

Sei $a \in A$. Es gilt:

- $\emptyset \in Pot\,(a)$
- $a \in Pot\,(a)$
- $Pot\,(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Definition 3.2 (Einermenge)**.** Sei $a \in A$. Wir definieren die Menge $\{a\} := \{b \in Pot\,(a) \mid b = a\}$. Sie existiert, denn es gilt:

$$Pot, Aus \models \forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in Pot\,(x) \wedge z = x) \, .$$

Die *Einermenge von a* enthält genau das Element a. Bemerke, dass im Allgemeinen die Mengen a und {a} verschieden sind: es gilt immer $a \in \{a\}$, aber im Allgemeinen nicht $\{a\} \in a$. Zum Beispiel, $\{\emptyset\} \notin \emptyset$. Mit den bisherigen Axiome können wir aber nicht ausschliessen, dass es Mengen a geben kann mit $a = \{a\}$. Erst mit dem *Fundierungsaxiom* können wir die Existenz solcher Mengen ausschliessen.

Seien nun a und b Mengen. Wir können dann die Menge $\{a, b\} := \{a\} \cup \{b\}$ definieren. Wir können auch *Dreiermengen* definieren, indem wir $\{a, b, c\} := \{a, b\} \cup \{c\}$ setzen. Induktiv definieren wir, nach **Pot**, $\cup$**-Ax** und **Aus** wohldefiniert:

$$für\ n \geq 1 : \{a_0, \dots, a_n\} := \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \cup \{a_n\}.$$

Satz 3.3 (Schema)**.** *Für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$\forall b\Big(b \in \{a_0, \dots, a_n\} \leftrightarrow b = a_0 \vee \dots \vee b = a_n\Big). \tag{3}$$

Beweis. Durch vollständige Induktion.
Für n=1: Es gilt wegen der Definition der Vereinigungsmenge:

$$b \in \{a_0, a_1\} \leftrightarrow b = a_0 \vee b = a_1.$$

Für $n \geq 1$: Nehme an, (3) gilt für n. Nach Definition von $\{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}
b \in \{a_0, \dots, a_{n+1}\} &\leftrightarrow b \in \{a_0, \dots, a_n\} \vee b \in \{a_{n+1}\} && (nach\ Def.) \\
&\leftrightarrow b = a_0 \vee \dots \vee b = a_n \vee b \in \{a_{n+1}\} && (nach\ Ind.Vor.) \\
&\leftrightarrow b = a_0 \vee \dots \vee b = a_n \vee b = a_{n+1}
\end{aligned}$$

□

4 Das Unendlichkeitsaxiom

Mit den bisherigen Axiomen kann man nicht die Existenz von unendlich vielen Mengen im Universum beweisen. Betrachte z.B. folgende Reihe von Mengen:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots \tag{4}$$

Aus den Axiomen kann man nicht die Existenz einer Menge beweisen, die alle unendlichen Glieder dieser Folge enthält. Wir brauchen also ein neues Axiom, welches unendliche Mengen gewährleistet.

Unendlichkeitsaxiom(Inf)

Es gibt eine Menge, die die leere Menge enthält und mit jedem b auch $b \cup \{b\}$, i.e:

$$\exists x \left({''}\emptyset \in x{''} \land \forall z \, (z \in x \to z \cup \{z\} \in x) \right).$$

Zur Notation: wir schreiben "$\emptyset \in x$" für $\forall y \, (\forall z \, (z \in y \to z \neq z) \to y \in x)$.

Inf ist das einzige Axiom, das die Existenz unendlicher Mengen sicherstellt.

Definition 4.1. Die Menge a ist *induktiv* $:\leftrightarrow \emptyset \in a \land \forall b \, (b \in a \to b \cup \{b\} \in a)$.

Also besagt **Inf**, dass es eine induktive Menge gibt.

Sei a_0 eine induktive Menge (sie existiert nach **Inf**). Nach Anwendung von **Aus** erhalten wir die Menge:

$$d := \{b \in a_0 \mid \forall c \, (c \text{ } \textit{induktiv} \to b \in c)\}.$$

Die Menge d enthält die Mengen, die Element aller induktiven Mengen sind.

Satz 4.2. *Die Menge d ist induktiv. Es gilt: $\forall c \, (c$ induktiv $\to d \subseteq c)$.*

Beweis. Die leere Menge $\emptyset$ ist Element von d, da sie in allen induktiven Mengen enthalten ist. Sei nun b ein Element von d; b ist also Element aller induktiven Mengen, und daher auch $b \cup \{b\}$. Es folgt, dass $b \cup \{b\}$ Element von d ist. Wir haben also gezeigt, dass d eine induktive Menge ist. Die zweite Eigenschaft folgt direkt aus der Definition von d. $\square$

Aus diesem Satz folgt, dass d (im Sinne von $\subset$) die kleinste induktive Menge ist.

5 Einige wichtige Begriffe der Mathematik

In diesem Kapitel werden wir einige wichtige Begriffe der Mathematik definieren, insbesondere das kartesische Produkt und den Funktionsbegriff.

Definition 5.1 (Paarmengenbildung)**.** Seien a_1 und $a_2 \in A$. Wir definieren die Menge $(a_1, a_2) := \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$. Sie ist nach **Pot**, $\cup$**-Ax** und **Aus** wohldefiniert.

Satz 5.2. $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \to a_1 = b_1 \land a_2 = b_2$.

Beweis. Sei $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$, also $\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$.
Falls $a_1 = a_2$: es gilt $\{b_1\} = \{a_1\} = \{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$, also $a_1 = b_1$ und $b_1 = b_2$.
Falls $a_1 \neq a_2$: es ist $\{a_1\} = \{b_1\}$ und $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$, also $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$. $\square$

Definition 5.3. Die Menge a *ist geordnetes Paar* $:\leftrightarrow \exists a_1 a_2\ a = (a_1, a_2)$.

Bemerkung 5.4. $a_1 \in b_1 \wedge a_2 \in b_2 \to (a_1, a_2) \in Pot\,(Pot\,(b_1 \cup b_2))$.

Beweis. Seien $a_1 \in b_1$ und $a_2 \in b_2$. Es gilt: $\{a_1\}$, $\{a_1, a_2\} \subseteq b_1 \cup b_2$. Das heisst: $\{a_1\}, \{a_1, a_2\} \in Pot\,(b_1 \cup b_2\})$. Es folgt, dass $(a_1, a_2) \subseteq Pot\,(Pot\,(b_1 \cup b_2))$. □

Definition 5.5. Wir definieren:

1. $(a) := a$.
2. Für $n \geq 1$: $(a_0, \ldots, a_n) := \Big((a_0, \ldots, a_{n-1}), a_n \Big)$.

Satz 5.6 (Schema)**.** *Für* $n \geq 0$ *gilt:*

$$(a_0, \ldots, a_n) = (b_0, \ldots, b_n) \leftrightarrow a_0 = b_0 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n. \tag{5}$$

Beweis. Durch vollständige Induktion über n.
Für n=1: Es gilt nach Satz 5.2. und **Ext**:

$$(a_0, a_1) \leftrightarrow a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1$$

Für $n \geq 1$: Nehme an, (5) gilt für n. Es gilt:

$$\begin{aligned}(a_0, \ldots, a_{n+1}) = (b_0, \ldots, b_{n+1}) &\leftrightarrow ((a_0, \ldots, a_n), a_{n+1}) = ((b_0, \ldots, b_n), b_{n+1}) \\ &\leftrightarrow (a_0, \ldots, a_n) = (b_0, \ldots, b_n) \wedge a_{n+1} = b_{n+1} \\ &\leftrightarrow a_0 = b_0 \wedge \ldots a_n = b = n \wedge a_{n+1} = b_{n+1}\end{aligned}$$

□

Definition 5.7 (Projektionsoperationen)**.** Die *Projektionsoperationen* ordnen jedem geordneten Paar die linke bzw. die rechte Komponente zu; sie sind nach Satz 5.2. wohldefiniert.

$$\pi_l\,(a) := \begin{cases} a_1, & \text{falls } \exists a_2\ a = (a_1, a_2), \\ \emptyset, & \text{falls } a \text{ kein geordnetes Paar;} \end{cases}$$
$$\pi_r\,(a) := \begin{cases} a_2, & \text{falls } \exists a_1\ a = (a_1, a_2), \\ \emptyset, & \text{falls } a \text{ kein geordnetes Paar.} \end{cases}$$

Bemerkung 5.8. $\Big(\pi_l\,(a_1, a_2), \pi_r\,(a_1, a_2)\Big) = (a_1, a_2)$

Definition 5.9 (Das kartesische Produkt)**.** Wir definieren:

$$b_1 \times b_2 := \{a \in Pot\,(Pot\,(b_1 \cup b_2)) \mid a \textit{ ist geordnetes Paar mit } \pi_l\,(a) \in b_1 \wedge \pi_r\,(a) \in b_2\}$$

Das Produkt $b_1 \times b_2$ heisst das *kartesische* oder *direkte Produkt* von b_1 und b_2. Nach Bemerkung 5.4. ist: $b_1 \times b_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in b_1, a_2 \in b_2\}$.

Falls $b_1 = \emptyset$ oder $b_2 = \emptyset$ ist $b_1 \times b_2 = \emptyset$. Die Mengen $b^1 := b$ und $b^{n+1} := b^n \times b$ (für $n \geq 1$) heissen *kartesische Potenzen* von b.

Definition 5.10. Wir definieren:

1. Die Menge a ist eine *Relation* $:\leftrightarrow$ a ist eine Menge von geordneten Paaren.

2. a ist eine *Relation über* b $:\leftrightarrow a \subseteq b \times b$.

Beispiel 5.11. Folgende Mengen sind Relationen:

- die *leere Relation* $\emptyset$

- die *Allrelation* $a \times a$ über der Menge a

- die *Identitätsrelation* $id_a := \{c \in a \times a \mid \pi_l(c) = \pi_r(c)\}$

- die $\in$-*Relation* $\in_a := \{c \in a \times a \mid \pi_l(c) \in \pi_r(c)\}$

Definition 5.12. Wir definieren:

$$Def(a) := \begin{cases} \{\pi_l(c) \mid c \in a\}, & \text{falls } a \text{ eine Relation ist,} \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$Bild(a) := \begin{cases} \{\pi_r(c) \mid c \in a\}, & \text{falls } a \text{ eine Relation ist,} \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$Feld(a) := Def(a) \cup Bild(a).$$

Sei $(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} \in a$. Die Mengen $\{a_1\}$ und $\{a_1, a_2\}$ sind Elemente von $\bigcup a$. Es folgt, dass a_1 und a_2 Elemente von $\bigcup\bigcup a$ sind. Wir erhalten somit, nach **Aus** wohldefiniert:

$$\{\pi_l(c) \mid c \in a\} = \{a_1 \in \bigcup\bigcup a \mid \exists a_2 \ (a_1, a_2) \in a\}$$
$$\{\pi_r(c) \mid c \in a\} = \{a_2 \in \bigcup\bigcup a \mid \exists a_1 \ (a_1, a_2) \in a\}$$

Es folgt, dass Definition 5.12. wohldefiniert ist (insbesondere dass die Mengen $Def(a)$ und $Bild(a)$ existieren).

Definition 5.13 (Der Funktionsbegriff)**.** f ist eine *Funktion* (kurz: $Fknf$) genau dann, wenn f eine Relation ist und für alle a_1, a_2, a_2' gilt:

$$(a_1, a_2) \in f \wedge (a_1, a_2') \in f \rightarrow a_2 = a_2'.$$

Sei f eine Funktion. Dann:

- $Def(f)$ ist ihr *Definitionsbereich*

- $Bild(f)$ ist ihr *Bildbereich*

Notation 5.14. Wir schreiben $f : X \to Y$, falls f eine Funktion ist mit $Def\,(f) = X$ und $Bild\,(f) \subseteq Y$.

Beispiel 5.15. Wir haben:

- $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$
- $id_a : a \to a$

Definition 5.16 (Der Funktionswert von a_1 unter f)**.**

$$f(a_1) := \begin{cases} a_2 \ mit \ \ (a_1, a_2) \in f, & \text{falls Fkn f} \wedge a_1 \in Def(f); \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 5.17. Wir definieren:

(i) f ist eine *Injektion* $:\leftrightarrow Fkn f \wedge \forall a\, b\, (a, b \in Def(f) \wedge a \neq b \to f(a) \neq f(b))$.

(ii) f ist eine *Injektion von X in Y* (kurz: $X \stackrel{\text{inj}}{\longrightarrow} Y$) $:\leftrightarrow f : X \to Y \wedge$ $f \ ist \ Injektion$

Definition 5.18. Wir können auch die *Hintereinanderschaltung* oder *Komposition* von Funktionen definieren:

$$g \circ f := \begin{cases} \{(a, g(f(a))) \mid a \in Def(f)\}, & \text{falls f und g Funktionen sind} \\ & \text{mit } Bild(f) \subseteq Def(g); \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Literatur

[1] Heinz-Dieter Ebbinghaus. *Einführung in die Mengenlehre*. Spektrum Akademischer Verlag, 2003. 4., überarbeite Auflage.