Peano-Axiome und Peano-Strukturen

Filippo Leonardi

27. März 2012

1 Peano-Arithmetik

Der Folgende Abschnitt beruht auf Abschnitt **3.3** in [Rau08] und benützt dieselbe Notation. In diesem Abschnitt arbeiten wir mit der sogenannten **Arithmetischen Sprache**:

$$\mathcal{L}_{ar} := \mathcal{L}\{\mathsf{0}, \mathtt{S}, +, \cdot\}$$

Hier bezeichnet $\mathsf{0}$ ein Konstantensymbol, $\mathtt{S}$ ein einstelliges Operationsymbol und $+$, $\cdot$ zweistellige Operatorensymbole.

Definition 1 (Peano-Arithmetik)**.** Die **Peano**[1] **Arithmetik** (abgekürzt PA) in $\mathcal{L}_{ar}$ ist durch das folgende Axiomensystem definiert:

(P1) $\forall x \quad \mathtt{S}x \neq \mathsf{0}$

(P2) $\forall x \quad x + \mathsf{0} = x$

(P3) $\forall x \quad x \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0}$

(P4) $\forall xy \quad (\mathtt{S}x = \mathtt{S}y \rightarrow x = y)$

(P5) $\forall xy \quad x + \mathtt{S}y = \mathtt{S}(x + y)$

(P6) $\forall xy \quad x \cdot \mathtt{S}y = x \cdot y + x$

(IS) $\left(\left(\varphi\frac{\mathsf{0}}{x} \wedge \forall x\left(\varphi \rightarrow \varphi\frac{\mathtt{S}x}{x}\right)\right) \rightarrow \forall x\varphi\right)^{\forall}$

Hier ist IS eine Menge von Aussagen, die alle Formeln φ durchläuft. Wir nennen deshalb IS auch ein **Induktionsschema**. Falls für eine Formel φ gilt $\mathsf{PA} \models \varphi\frac{\mathsf{0}}{x}$, sprechen wir von einen **Induktionsanfang** für φ und falls $\mathsf{PA} \models \forall x\left(\varphi \rightarrow \frac{\mathtt{S}x}{x}\right)$ (was gleichwertig zu $\varphi \models_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathtt{S}x}{x}$ ist[2]), sprechen wir von **Induktionsschritt** für φ.

[1] Aus *Giuseppe Peano* (1858-1932).

[2] Vgl. vorherige Vorträge.

Definition 2. Wir benutzen folgenden Konventionen:

$$\underline{0} := \mathtt{0},\ \underline{n} := \mathtt{S}^n\mathtt{0} := \underbrace{\mathtt{S}\cdots\mathtt{S}}_{n}\mathtt{0}$$

Definition 3. Wir definieren:

$$x \leq y :\leftrightarrow \exists z\ (z + x = y)$$
$$x < y :\leftrightarrow \exists z\ ((z + x = y) \wedge x \neq y)$$

und ganz analog $\geq, >$[3].

Beispiel 4. Aus PA folgen (hier kommt y auf α und β nicht frei vor):

- $\forall x\ x \neq \mathtt{S}x$;
- $\forall x\ (x \neq \mathtt{0} \rightarrow \exists y\ \mathtt{S}y = x)$;
- $\forall xy\ \mathtt{S}y + x = y + \mathtt{S}x$;
- $\forall xyz\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
- $\forall xy\ y + x = x + y$;
- $\forall xyz\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
- $\forall xy\ x \cdot y = y \cdot x$;
- $\forall xy\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
- $\forall xy\ (x < \mathtt{S}y \leftrightarrow x \leq y)$;
- $(\forall x((\forall y < x)\alpha\frac{y}{x} \rightarrow \alpha)) \rightarrow \forall x\alpha$ ($<$-Induktion).
  In Worten: "sei α eine Formel, so dass (für beliebiges x) falls sie für jede $y < x$ gilt, dann gilt auch für x. Dann gilt die Formel α für alle x";
- $\exists x\beta \rightarrow \exists x(\beta \wedge (\forall y < x)\neg\beta\frac{y}{x})$ (Minimalzahl).
  In Worten: "falls es eine Formel β für x gilt, dann es existiert ein kleinste Zahl für dem die Formel gilt".

Einige beweise davon stehen in Anhang A Seite 9.

Beispiel 5. Wir definieren $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$ (hier sei $\mathbb{N}$ die Menge der nichtnegativen natürlichen Zahlen im "naiven" Sinn) wobei: $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ (die **Nachfolgerfunktion**). Dann erfüllt $\mathcal{N}$ die Theorie von PA.

---

[3] Oft schreiben wir $(\forall x \leq y)\varphi$ statt $\forall x(x \leq y \rightarrow \varphi)$ um die Schreibweise zu vereinfachen.

Beispiel 6. Wir definieren $\Omega := \{n + n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der **geraden Zahlen** und $S^2 : n \mapsto n + 2$. Dann erfüllt $(\Omega, 0, S^2, +, \cdot)$ genau die selben Axiomen wie $\mathcal{N}$. Diese beiden Modelle sind zueinander isomorph. Die eindeutige Isomorphie[4] ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \Omega, n \mapsto n + n$.

Für den Beweis von Satz 8 benutzen wir den Kompaktheitsatz für das Folgern (Satz **3.2** Seite 82 in [Rau08]), den wir erst in einem späteren Vortrag formulieren und beweisen werden. Der Satz besagt:

Satz 7. Eine Formelmenge X ist erfüllbar, falls jede endliche Teilmenge von X erfüllbar ist.

Satz 8 (Existenz eine Nichtstandard-Modells)**.** Es existiert für die Theorie $\mathrm{Th}\mathcal{N}$ ein zu $\mathcal{N}$ *nicht* isomorphes Modell $\mathcal{N}'$. Insbesondere erfüllt $\mathcal{N}'$ die Theorie von PA.

Definition 9. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ nicht isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen und $\mathcal{A}' \models \mathrm{Th}\mathcal{A}$. Dann nennen wir $\mathcal{A}'$ ein **Nichtstandard-Modell**

Beweis. Sei $x \in \mathrm{Var}$. Wir setzen:

$$X := \mathrm{Th}\mathcal{N} \cup \{\underline{n} < x \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist $Y \subseteq X$ endlich dann gibt es ein m mit:

$$Y \subseteq Z := \mathrm{Th}\mathcal{N} \cup \{\underline{n} < x \mid n < m\} \subseteq X$$

Dann hat Z sicher ein Modell indem wir x in $\mathcal{N}$ mit m belegen, welches dann auch ein Modell für Y ist. Wegen das Kompaktheitsatz hat X somit ein Modell $(\mathcal{N}', w)$, wobei $\mathcal{N}'$ eine Struktur $\mathcal{N}' = (\mathbb{N}', 0', S', +', \cdot')$ ist. Wir definieren $c := w(x)$.

Mit $i : S^n0 \mapsto S'^n0'$ erhalten wir eine Einbettung[5] von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{N}'$. Wir identifizieren $\mathcal{N}$ mit $i(\mathcal{N})$ und n mit S'^n0'.

Das Modell $\mathcal{N}$ ist zu $\mathcal{N}'$ *nicht* isomorph, denn jeder Homomorphismus von Strukturen $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ muss folgende Bedingungen erfüllen:

- $f(0) \mapsto 0'$;
- $f(S^n0) \mapsto S'^n0'$.

Aber eine solche Abbildung kann nicht surjektiv sein, denn $c \in \mathbb{N}'$ kann nicht als S'^n0' geschrieben werden (denn sonst wäre $x^{\mathcal{N}'} = c = S'^n0' = \underline{n}^{\mathcal{N}'}$ welche ein Widerspruch zu $\underline{n} < x \in X \Rightarrow \underline{n} \neq x$). $\square$

[4]Gemeint ist hier ist ein Isomorphismus zwischen Strukturen wie in den vorherigen Vorträgen definiert.

[5]I.e. ein injektive Homomorphismus.

Der Beweis von Satz 8 zeigt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}'$, Elementen aus $\mathbb{N}' \setminus \mathbb{N}$ heissen **Nichtstandardzahlen**. Zum Beispiel sind c, $c+c$, $n \cdot c$, $c+n$ und $c \cdot c$ Nichtstandardzahlen.

Da $\mathcal{N}' \models X$ es gilt $\mathcal{N}' \models \mathrm{Th}\mathcal{N}$, somit gelten in $\mathcal{N}'$ genau die Aussagen die in $\mathcal{N}$ gelten. Zum Beispiel: jede Zahl in $\mathbb{N}'$ ist entweder gerade oder ungerade, i.e.:

$$\mathcal{N}' \models \forall x \exists y \ (x = \underline{2}y \ \dot{\vee} \ x = \underline{2}y + \underline{1})$$

Hier bezeichne $\dot{\vee}$ die exklusive Disjunktion.

Bemerkung 10. Mit den Prinzip des obiges Konstruktion können wir auch Nichtstandard-Modelle für die Theorie des reellen Zahlen finden[6].

2 Peano-Strukturen

Der folgende Abschnitt behandelt Kapitel V aus [Ebb03]. Die Notation ist wie im vorherigen Vortrag über Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem. Hier brauchen wir die Zermelo Axiomensystem Z^0, das heisst alle Axiomen(-schemata) von ZFC bis auf das Auswahlaxiom, das Fundierungsaxiom und das Ersetzungsaxiom. Im folgenden Abschnitt bezeichne $\mathcal{A} = (A, \in)$ immer ein Modell für Z^0 in der Sprache $\mathcal{L}_\in$.

Unser Ziel ist es ein $\omega \in A$ zu finden, welches, als menge aufgefasst, gewisse Eigenschaften des (naiv definierten) natürlichen Zahlen erfüllt. Dieses ω wird bis auf Isomorphie (vgl. Definition 12) eindeutig sein.

Definition 11 (Peano-Struktur)**.** Eine **Peano-Struktur** in A ist eine Tripel (a, σ, a_0) wobei $a, a_0 \in A, a_0 \in a$ Mengen sind und $\sigma : a \to a$ eine Funktion, so dass:

(S1) $\sigma : a \hookrightarrow a$;

(S2) $a_0 \notin \mathrm{Im}(\sigma)$;

(S3) für jedes $b \in A$ mit $b \subseteq a$ und $a_0 \in b$ so dass mit $c \in b$ auch $\sigma(c) \in b$, ist $b = a$.

Definition 12. Zwei Tripel (a, σ, a_0) und (b, ν, b_0) sind **isomorph** falls es eine bijektive Abbildung $f : a \to b$, so dass:

- $a_0 \mapsto b_0$;

[6]Diese Gebiet der Mathematik würde in 1966 bei Abraham Robinson entwickelt über die ursprüngliche Leibniz Formulierung der Infinitesimalrechnung.

- $f(\sigma(d)) = \nu(f(d))$ für jede $d \in a$.

Definition 13 (Die mengentheoretischen natürlichen Zahlen)**.** Wir definieren:

(1) $\mathbf{0} := \emptyset$

(2) $\mathbf{n} + \mathbf{1} := \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$

dann wählen wir ω als die kleinste induktive Menge die $\mathbf{0}$ enthält[7] und eine Funktion:

(3) $\mathbf{S} := \{z \in \omega^2 \mid \pi_r(z) = \pi_l(z) \cup \{\pi_l(z)\}\}$

Daher gilt $\mathbf{S}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\} =: \mathbf{n} + \mathbf{1}$. Insbesondere gilt $\mathbf{S}(\mathbf{n}) = \{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{n}\}$, wie man leicht durch Induktion beweist. Wir nennen $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ die **Mengentheoretischen natürlichen Zahlen**[8].

Lemma 14. $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ erfüllt (S2) und (S3).

Beweis. Es gilt:

- (S2): sei $i \in \mathrm{Im}(\mathbf{S})$. Dann es existiert ein $j \in \omega$ mit $i = j \cup \{j\}$ also $j \in i$ und somit ist $i \neq \emptyset = \mathbf{0}$;

- (S3): gilt per Konstruktion von ω.

□

Korollar 15 (Vollständige Induktion über ω)**.** Sei $c \in A$ mit $\mathbf{0} \in c$ und für jedes $i \in \omega$ gelte $i \in c \Rightarrow \mathbf{S}(i) \in c$. Dann ist $c \supseteq \omega$.

Beweis. Folgt sofort auf (S3) für $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ und mit $b := c \cap \omega$. □

Lemma 16. Sei $i \in A, j \in \omega$. Es gilt:

a) $i \in j \Rightarrow i \in \omega$ und $i \subseteq j$;

b) $\mathrm{Im}(\mathbf{S}) \cup \{\mathbf{0}\} = \omega$.

Beweis. Es gilt:

---

[7]Diese Menge existiert auf Grund des Unendlichkeitsaxioms und des Aussonderungsaxioms, vgl. vorheriger Vortrag.

[8]Diese Definition geht (1923) auf *John von Neumann* (1903-1957) züruck.

1. Beweis durch vollständige Induktion über ω (Korollar 15). Wir setzen:

   $$b := \{i \in \omega \mid \forall j \in \omega (j \in i \to j \in \omega \land j \subseteq i)\}$$

   Dann:
   Induktionsanfang ($\mathbf{0} \in b$): trivial mit $\neg \exists i \in \mathbf{0}$.
   Induktionsschritt: für jedes $i \in \omega$ ist $i \in b \Rightarrow \mathbf{S}(i) \in b$, denn sei $i \in b$, dann: $j \in \mathbf{S}(i) = i \cup \{i\} \Rightarrow j \in i$ oder $j = i$. Ist $j \in i$ so Induktionsvoraussetzung $i \in b$ liefert $j \in \omega$ und $j \subseteq i$. Ist $j = i$ so gilt $j \in \omega$ und $j \subseteq i$. Somit $j \in \omega$ und $j \subseteq i \subseteq \mathbf{S}(i)$.
   Also ist mit Korollar 15 $b = \omega$;

2. Wir wenden Korollar 15 auf $b := \mathrm{Im}(\mathbf{S}) \cup \{\mathbf{0}\} \ni \mathbf{0}$ mit $i \in \mathbf{S}(\omega) \cup \{\mathbf{0}\}$ ist trivialerweise $\mathbf{S}(i) \in \mathrm{Im}(\mathbf{S})$. Also $b = \omega$.

$\square$

Satz 17. $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ ist eine Peano-Struktur.

Beweis. Mit Lemma 14 bleibt es nur (S1) zu zeigen: wir verwenden Lemma 16. Sei $i, j \in \omega$ und $\mathbf{S}(i) = \mathbf{S}(j)$ i.e. $i \cup \{i\} = j \cup \{j\}$. Es gilt: $j \in i$ oder $j = i$. Mit Lemma 16 Punkt 1. ist $j \subseteq i$. Anderseits ist $i \in j$ oder $i = j$ das heisst $i \subseteq j$. Somit (nach Ext) ist $i = j$. $\square$

Satz 18 (ω-Rekursionstheorem)**.** Ist $F : b \to b$ eine Funktion ($b \in A$), $c \in b$ so gibt es genau ein Funktion $f : \omega \to b$ mit:

i) $f(\mathbf{0}) = c$;

ii) für jede $i \in \omega$ ist $f(\mathbf{S}(i)) = F(f(i))$.

Definition 19. Eine Definition einer Funktion f wie in Satz 18 f heisst eine **rekursive Definition** von f. Die Funktion F heisst dann **Rekursionvortschrift**. Wir nennen für $j \in \omega$ und $b \in A$ eine Funktion $g : j \to b$ einer **Anfang** bezüglich F und c falls:

- $g(\mathbf{0}) = c$;
- für alle $i \in \omega, i \subsetneq j$ gilt $g(\mathbf{S}(i)) = F(g(i)))$.

Bemerkung 20. Wir können durch vollständige Induktion über ω zeigen, dass für je zwei Anfangen g und $\tilde{g}$ bezüglich F und c gilt: $g \subseteq \tilde{g}$ oder $\tilde{g} \subseteq g$.

Beweis. Seien F und c gegeben.

- Eindeutigkeit: seien f und $\tilde{f}$ zwei Funktionen mit Definitionsbereich ω und Bild b, welche i) und ii) erfüllen. Dann gilt durch vollständige Induktion über ω mit $b := \{i \in \omega \mid f(i) = \tilde{f}(i)\}$: für alle $i \in \omega$ gilt: $f(i) = \tilde{f}(i)$;

- Existenz: wir zeigen durch vollständige Induktion über ω: für jede $i \in \omega$ es existiert ein Anfang mit $\mathrm{Def}(g) = \mathbf{S}(i)$:
  Induktionsanfang: setze $g := \{(\mathbf{0}, c)\}$
  Induktionsschritt: sei g mit $\mathrm{Def}(g) = \mathbf{S}(j)$ für ein $j \in \omega$. Dann ist:

  $$\tilde{g} := g \cup \{(\mathbf{S}(j), F(g(j)))\}$$

  ein Anfang mit $\mathrm{Def}(\tilde{g}) = \mathbf{S}(\mathbf{S}(j))$.
  Per Induktion gilt: für jede $i \in \omega$ es existiert ein Anfang mit $\mathrm{Def}(g) = \mathbf{S}(i)$, insbesondere ist $g(i)$ eindeutig bestimmt für jedes Anfang. Wir definieren die Funktion $f : \omega \to b$:

  $$f := \{(i, j) \in \omega \times bX \mid \exists (g \text{ Anfang und } j = g(i))\}$$

  welche nach Bemerkung 20 wohldefiniert ist. Diese Funktion hat dann die gewünschten Eigenschaften.

□

Satz 21. Ist (a, σ, a_0) eine Peano-Struktur so ist sie zu $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ isomorph.

Beweis. Wir konstruieren eine Funktion $f : \omega \to a$ wie folgt (mit Satz 18):

- $f(\mathbf{0}) = a_0$;

- für jede $i \in \omega$ sei $f(\mathbf{S}(i)) = \sigma(f(i))$.

Wir zeigen nun, dass f eine Bijektion ist:

- sei $b := \mathrm{Im}(f) \subseteq a$ und $a_0 = f(\mathbf{0}) \in b$. Sei $d \in b$ dann es existiert ein $i \in \omega$ mit $d = f(i)$ d.h. $\sigma(d) = \sigma(f(i)) = f(\mathbf{S}(i)) \in b$. Dann ist mit (S3) $b = a$;

- sei:

  $$b := \{i \in \omega \mid \forall j (i \neq j \to f(i) \neq f(j))\}$$

  Wir wollen $b = \omega$ zeigen. Wir benutzen damit vollständige Induktion über ω:

Induktionsanfang ($\mathbf{0} \in b$): sei $i \neq \mathbf{0}$ mit Lemma 16 Punkt 2. es existiert ein $j \in \omega$ so dass $i = \mathbf{S}(j)$ also:

$$f(i) = f(\mathbf{S}(j)) = \sigma(f(j)) \overset{(\mathsf{S2})}{\neq} a_0 = f(\mathbf{0})$$

Induktionsschritt: für jede $i \in \omega$ gilt $i \in b \Rightarrow \mathbf{S}(i) \in b$:
denn sei $i \in b$ und $j \neq \mathbf{S}(i)$ dann:

- falls $j = \mathbf{0}$ gehen wir genau wie im Induktionsanfang weiter;
- falls $j \neq \mathbf{0}$ es existiert ein $k \in \omega$ so dass $j = \mathbf{S}(k)$ und $\mathbf{S}(i) \neq j = \mathbf{S}(k)$. Damit ist mit ($\mathsf{S1}$) gilt $i \neq k$ und mit Induktionsvoraussetzung ist $f(i) \neq f(k)$. Damit ist:

$$f(\mathbf{S}(i)) = \sigma(f(i)) \overset{(\mathsf{S2})}{\neq} \sigma(f(k)) = f(\mathbf{S}(k)) = f(j)$$

Also ist mit ($\mathsf{S3}$) gilt $b = \omega$.

$\square$

Bemerkung 22. Falls wir einen der ($\mathsf{S1}$), ($\mathsf{S2}$) oder ($\mathsf{S3}$) in der Definition der Peano-Struktur (Definition 11) weglassen, dann ist Satz 21 nicht mehr gültig. Betrachten die folgenden Tripel:

- $T_1 := (\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}, \{(\mathbf{0}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{1})\}, \mathbf{0})$;
- $T_2 := (\{\mathbf{0}\}, \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}, \mathbf{0})$;
- $T_3 := (\omega, \mathbf{S}^2, \mathbf{0})$.

Alle drei Tripel sind zu $(\omega, \mathbf{S}, \mathbf{0})$ *nicht* isomorph. Aber T_1, bzw. T_2, bzw. T_3 wäre eine Peano-Struktur, wenn wir von den drei Axiomen ($\mathsf{S1}$), bzw. ($\mathsf{S2}$), bzw. ($\mathsf{S3}$) weglassen werden.

Satz 23 (Existenz von $+$ und $\cdot$)**.** Es existieren eindeutige zweistellige Operationen $+$ und $\cdot$ auf ω, die folgenden Bedingungen erfüllen. Für alle $i, j \in \omega$:

- $\mathbf{S}(i) = i + \mathbf{1}$;
- $i + \mathbf{0} = i$;
- $i + (j + \mathbf{1}) = (i + j) + \mathbf{1}$;
- $i \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- $i \cdot (j + \mathbf{1}) = (i \cdot j) + i$.

Beweis. Wir definieren hier beispielhaft die Funktion + (den Teil $\cdot$ folgt ganz Analog mit $F : \omega \to \omega, j \mapsto j+i, c := \mathbf{0}$) mit Satz 18. Wir definieren für jedes $i \in \omega$ die Funktion $\mathrm{plus}_i : \omega \to \omega$ rekursiv mit $F := \mathbf{S}, c := i$ und setzen:

$$+ := \{(i,j), k) \in (\omega \times \omega) \times \omega \mid k = \mathrm{plus}_i(j)\}$$

Dann ist + die eindeutige Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

Bemerkung 24. Wir können sogar beweisen dass es in Peano-Strukturen mit die obige definierten $+$, $\cdot$ die üblichen Rechneregeln gelten, wie zum Beispiel, Assoziativität, Kommutativität, Distributivität, das Minimalzahl und die $<$-Induktion.

Beispiel 25. Zum Beispiel es gilt:

- $\mathbf{2} + \mathbf{2} = \mathbf{2} + \mathbf{S}(\mathbf{1}) = \mathbf{S}(\mathbf{2} + \mathbf{1}) = \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{2})) = \mathbf{S}(\mathbf{3}) = \mathbf{4}$;
- $\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{1}) = (\mathbf{2} \cdot \mathbf{1}) + \mathbf{2} = (\mathbf{2} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{0})) + \mathbf{2} = ((\mathbf{2} \cdot \mathbf{0}) + \mathbf{2}) + \mathbf{2} = (\mathbf{0} + \mathbf{2}) + \mathbf{2} = \mathbf{2} + \mathbf{2} = \mathbf{4}$

Beispiel 26. Satz 18 sagt nichts über Rekursionen mit mehrere Startwerte, wie zum Beispiel die Fibonacci-Folge. Trotzdem können wir Satz 18 mit $b = \omega^2$, $F : \omega^2 \to \omega^2, z \mapsto (\pi_r(z),\ \pi_l(f(z)) + \pi_r(f(z)))$ und $c := (\mathbf{1}, \mathbf{1})$ anwenden. Dann setzen wir: $\mathrm{fib} := \pi_l \circ f : \omega \to \omega$.

A Anhang: ein paar Aussagen in PA

Hier sind $(a), (b), (c), \ldots$ die Folgerungsregeln wie in [Rau08], Seite 62.

Bemerkung 27. Falls $\varphi \models_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathtt{S}x}{x}$ dann $\models_{\mathsf{PA}} \forall x(\varphi \to \varphi\frac{\mathtt{S}x}{x})$ (mit (d)).

- $\forall x\ x \neq \mathtt{S}x$
  Denn sei $\varphi := (x \neq \mathtt{S}x)$:
  Anfang:

$$\overset{\mathsf{P1}}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \forall x\ \mathtt{S}x \neq \mathtt{0}$$

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \mathtt{S0} \neq \mathtt{0}$$

$$\Rightarrow \models_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathtt{0}}{x}$$

Schritt:

$$\begin{aligned}
&\overset{\mathsf{P4}}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \forall x, y\ (\mathtt{S}x = \mathtt{S}y \to x = y) \\
&\Rightarrow \models_{\mathsf{PA}} \forall x, y\ (x \neq y \to \mathtt{S}x \neq \mathtt{S}y) \\
&\overset{(a)}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \forall x\ (x \neq \mathtt{S}x \to \mathtt{S}x \neq \mathtt{SS}x) \\
&\Rightarrow \models_{\mathsf{PA}} \forall x \left(\varphi \to \varphi\frac{\mathtt{S}x}{x}\right)
\end{aligned}$$

IS liefert $\models_{\mathsf{PA}} \forall x\varphi$.

- $\forall x\ (x \neq \mathsf{0} \to \exists y\ \mathtt{S}y = x)$
  Denn sei $\varphi := (x \neq \mathsf{0} \to \exists y\ \mathtt{S}y = x)$:
  Anfang:

$$\begin{aligned}
&\models_{\mathsf{PA}} \mathsf{0} = \mathsf{0} \\
\Rightarrow\ &\models_{\mathsf{PA}} \mathsf{0} \neq \mathsf{0} \to \exists y\ \mathtt{S}y = x \\
\Rightarrow\ &\models_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathsf{0}}{x}
\end{aligned}$$

Schritt:

$$\begin{aligned}
&\mathtt{S}y = x \models_{\mathsf{PA}} \mathtt{SS}y = \mathtt{S}x \\
&\overset{(f)}{\Rightarrow} \mathtt{S}y = x \models_{\mathsf{PA}} \exists t\ \mathtt{S}t = \mathtt{S}x \\
&\overset{(e)}{\Rightarrow} \exists t\ \mathtt{S}t = x \models_{\mathsf{PA}} \exists t \mathtt{S}t = \mathtt{S}x \\
(*)\quad &\Rightarrow x \neq \mathsf{0} \to \exists t\ \mathtt{S}t = x \models_{\mathsf{PA}} x \neq \mathsf{0} \to \exists t \mathtt{S}t = \mathtt{S}x \\
&\models_{\mathsf{PA}} \mathtt{S}\mathsf{0} = \mathtt{S}\mathsf{0} \\
&\overset{(f)}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \exists t\ \mathtt{S}t = \mathtt{S}\mathsf{0} \\
&\Rightarrow \models_{\mathsf{PA}} x = \mathsf{0} \to \exists t\ \mathtt{S}t = \mathtt{S}x \\
&\overset{*}{\Rightarrow} x \neq \mathsf{0} \to \exists t\ \mathtt{S}t = x \models_{\mathsf{PA}} \exists t\ \mathtt{S}t = \mathtt{S}x \\
&\overset{\mathsf{P1}}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \mathtt{S}x \neq \mathsf{0} \\
&\Rightarrow x \neq \mathsf{0} \to \exists t\ \mathtt{S}t = x \models_{\mathsf{PA}} \mathtt{S}x \neq \mathsf{0} \to \exists t \mathtt{S}t = \mathtt{S}x \\
&\Rightarrow \varphi \models_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathtt{S}x}{x}
\end{aligned}$$

IS liefert $\forall x\varphi$.

- $\forall xy\ \mathtt{S}y + x = y + \mathtt{S}x$
  Denn sei: $\varphi := (\forall y\ \mathtt{S}y + x = y + \mathtt{S}x)$:

Anfang:

$$\overset{\mathsf{P5}}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \forall y\ \mathtt{S}(y+\mathsf{0}) = y + \mathtt{S}\mathsf{0}$$
$$\overset{\mathsf{P2}}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \forall y\ \mathtt{S}(y) = y + \mathtt{S}\mathsf{0}$$
$$\overset{\mathsf{P2}}{\Rightarrow} \models_{\mathsf{PA}} \forall y\ \mathtt{S}y + \mathsf{0} = y + \mathtt{S}\mathsf{0}$$
$$\Rightarrow \models_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathsf{0}}{x}$$

Schritt:

$$\mathtt{S}y + x = y + \mathtt{S}x \models_{\mathsf{PA}} \mathtt{S}(\mathtt{S}y + x) = \mathtt{S}(y + \mathtt{S}x)$$
$$\Rightarrow \mathtt{S}y + x = y + \mathtt{S}x \models_{\mathsf{PA}} \mathtt{S}y + \mathtt{S}x = y + \mathtt{SS}x$$
$$\Rightarrow \varphi \models_{\mathsf{PA}} \varphi\frac{\mathtt{S}x}{x}$$

IS liefert $\forall x\varphi$.

Literatur

[Ebb03] Ebbinghaus, Heinz Dieter: *Einführung in die Mengenlehre*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage, 2003.

[Rau08] Rautenberg, Wolfgang: *Einführung in die Mathematische Logik*. Vieweg-Teubner, 3. Überarb. Auflage, 2008.