Grundideen der harmonischen Analysis: **Fourrieranalysis**

Ghazale Jazayeri, Marcello Sani, Mirjana Vukelja

20. Dezember 2007

1 Einführung

Ziel dieser Arbeit ist einen ausführlichen Beweis vom Theorem von Plancherel anzugeben. Um diesen Beweis vollständig zu verstehen, brauchen wir einige Resultate aus der L^1 Theorie, die im ersten Teil dieser Arbeit präsentiert werden. Im zweitem Teil geht es um die L^2 Theorie und, wie schon angedeutet, um das Theorem von Plancherel. Anschliessend möchten wir ein schönes Anwendungsbeispiel vorstellen, welches wir mit Resultaten aus der L^2 Theorie gelöst haben. Zuletzt zeigen wir, dass die Fourriertransformation auf L^p, für p zwischen 1 und 2 fortgesetzt werden kann.

2 L^1 Theorie der Fourriertransformation

Als Einstieg in die L^1 Theorie müssen wir zwei wichtige Definitionen machen, nämlich die Definition vom L^p Raum und L^∞ Raum.

Definition 1.

L^p **Raum** *Sei $1 \leq p < \infty$, dann bezeichnet man mit $L^p(\mathbb{R}^n)$ den Raum aller messbaren Funktionen f, für die*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty$$

gilt. $\|f\|_p$ nennt man die L^p Norm von f.

L^∞ **Raum** *Der Raum $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ enthält alle wesentlich beschränkte Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$, d.h. für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Norm folgendermassen*

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f| \, ,$$

wobei

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} f = \inf_{c \in [0,\infty]} \{f \leq c \textit{ fast überall}\} \, .$$

Nun führen wir die Fourriertransformation ein, die ein zentraler Begriff dieser Arbeit sein wird.

Definition 2 (Fourriertransformation)**.** *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert die Funktion*

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot t} f(t) dt$$

die Fourriertransformation von f, für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Um den Leser mit der letzten Definition vertrauter zu machen, betrachten wir als nächstes ein Beispiel.

Beispiel 3. *Sei $I = \{t \in \mathbb{R}^n \colon |t_j| < 1\}$, dann sieht die Fourriertrasformation von $f = \chi_I$ so aus*

$$\hat{f}(x) = \prod_{j=1}^{n} \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x_j t_j} dt_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(2\pi x_j)}{\pi x_j}.$$

Definition 4 (Faltung)**.** *Die Faltung $h = f * g$ zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy,$$

für $x \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 5.

1. *Die Funktion $f(x-y)g(y)$ ist eine messbare Funktion von x und y.*
2. *$h = f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*
3. *Die Faltung ist kommutativ, assoziativ und distributiv.*

Satz 6. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $h = f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Darüberhinaus, gilt die folgende Ungleichung*

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 .$$

Beweisskizze. Es gilt die Ungleichung

$$|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy.$$

Die Behauptung folgt mit der Minkowski Ungleichung. □

Zu bemerken ist, dass die Fourrietransformation der Faltung zweier Funktionen das punktweise Produkt ihrer Fourriertransformationen ist. Das ist die Aussage des nächsten Satzes, welches aus den Definitionen folgt.

Satz 7. *Für f und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\widehat{(f * g)} = \hat{f} \hat{g}.$$

Diesen Satz werden wir vor allem im Paragraph 3 benutzen, wo wir einige Resultate der L^2 Theorie zeigen werden, insbesondere beim Beweis von Theorem 11.

Satz 8. *Sind f und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Beweis. Mit Hilfe des Theorems von Fubini erhalten wir die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot t} f(t)dt \right) g(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i t\cdot x} g(x)dx \right) f(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{g}(t)dt
\end{aligned}$$

□

Wir möchten den Leser darauf hinweisen, dass der Satz 8 die Fourriertransformation von temperierten Distributionen motiviert.

Ein wichtiges Resultat der L^1 Theorie ist die Inversionsformel für die Fourriertransformation. Insbesondere werden wir Satz 10 beim Beweis des Theorems von Plancherel benuzten.

Satz 9. *Sind f und $\hat{f}$ beide integrierbar, dann gilt für fast alle t*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}dx.$$

Satz 10. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \geq 0$ und f stetig in 0, dann ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}dx,$$

für fast alle t. Insbesondere gilt

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)dx.$$

3 Die L^2 Theorie und das Plancherel Theorem

Die Definition der Fourriertransformierten für Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$ kann nicht auf Funktionen in $L^2(\mathbb{R}^n)$ angewendet werden. In diesem Abschnitt führen wir eine natürliche Erweiterung der Fourriertransformierten für $L^2(\mathbb{R}^n)$ Funktionen ein. Wir werden auch eine neue Notation für die Fourriertransformation verwenden, nämlich $\mathscr{F}f = \hat{f}$, um deutlich zu machen, dass $\mathscr{F}$ ein Operator ist .

Theorem 11. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Beweis. Wir definieren $g(x) = \overline{f(-x)}$ und erhalten durch untenstehende Berechnung $\overline{\hat{f}} = \hat{g}$, wobei wir beim dritten Gleicheitszeichnen eine Variablensubstitution durchgeführt haben.

$$\overline{\hat{f}(x)} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x\cdot t}dt} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(t)}e^{2\pi i x\cdot t}dt = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-t)}e^{-2\pi i x\cdot t}dt = \hat{g}(x).$$

Nun setzen wir $h = f * g$.
Mit dem Satz 7 und der vorherigen Berechnung erhalten wir

$$\hat{h} = \hat{f}\hat{g} = \hat{f}\overline{\hat{f}} = |\hat{f}|^2.$$

Somit erhalten wir die folgende Formel, wobei wir für die zweite Gleichung den Satz 10 gebraucht haben, da $\hat{h} \geq 0$ und h gleichmässig stetig ist.

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h} dx \overset{\text{Satz 10}}{=} h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)\overline{f(-y)}dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\overline{f(y)}dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dy = \|f\|_2.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 12. $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *ist ein beschränkter und linearer Operator.*

Beweis. Mit Satz 11 folgt sofort, dass $\mathscr{F}$ beschränkt ist und die Linearität erhält man aus der Definition von $\mathscr{F}$. □

Wegen $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Deshalb können wir eine eindeutige, beschränkte Fortsetzung von $\mathscr{F}$ für alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ konstruieren.
Diese Konstruktion sieht wie folgt aus: Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dann definieren wir für $N \in \mathbb{N}$ folgende Funktionenfolge:

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & , |t| \leq N \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Für solche Funktionen gilt sicher $f_N \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, da die Menge $\{t \in \mathbb{R}^n : |t| \leq N\}$ kompakt ist. Mit dem Satz der dominierten Konvergenz erhalten wir

$$\|f_N - f\|_2 \to 0, \text{ für } N \to \infty.$$

Weiter wissen wir, dass $\hat{f}_N \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und mit der untenstehenden Gleichung zeigen wir, dass $\hat{f}_N$ eine Cauchyfolge ist:

$$\|\hat{f}_N - \hat{f}_L\|_2 \overset{\text{Theorem11}}{=} \|f_N - f_L\|_2 \to 0, \text{ für } N, L \to \infty.$$

Da $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, existiert ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$g = \lim_{N\to\infty} \hat{f}_N$$

und somit definieren wir $\hat{f} := g = \lim_{N\to\infty} \hat{f}_N$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 13. *Es kommt nicht auf Wahl von f_N an.*

Beweis. Sei f_N wie oben, und g_N eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass $g_N \to f$. Dann folgt

$$0 = \lim_{N\to\infty} \|f_N - g_N\|_2 = \lim_{N\to\infty} \|\hat{f}_N - \hat{g}_N\|_2 = \|\hat{f} - \lim_{N\to\infty} \hat{g}_N\|_2.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\hat{f} = \lim_{N\to\infty} \hat{g}_N$. □

Bemerkung 14. *Satz 8 und Theorem 11 sind nicht nur für Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, sondern auch für Funktionen in $L^2(\mathbb{R}^n)$ richtig. Wir beweisen dies für Theorem 11.*

Beweis. Seien f_N und g_N Folgen in $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $f_N \to f$ und $g_N \to g$.

$$\begin{aligned}\|\hat{f} - \hat{g}\|_2 &= \|\lim_{N\to\infty} \hat{f}_N - \hat{g}_N\|_2 = \lim_{N\to\infty} \|\hat{f}_N - \hat{g}_N\|_2 \\ &\overset{Thm.11}{=} \lim_{N\to\infty} \|f_N - g_N\|_2 = \|\lim_{N\to\infty} f_N - g_N\|_2 = \|f - g\|_2 .\end{aligned}$$

□

Um die Aussage des Plancherel Theorems zu verstehen, müssen wir vorher noch einige Überlegungen zum Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ machen. Es ist leicht zu sehen, dass $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}dx$ ist. Wir werden die folgende Notation verwenden: $\langle f, g\rangle := \langle f, g\rangle_{L^2}$.

Definition 15. *Ein unitärer Operator ist ein Operator, der linear, isometrisch und bijektiv ist.*

Wir erinnern den Leser daran, dass für unitäre Operatoren $T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, der adjungierte Operator T^* gleich T^{-1} ist, d.h.

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle = \left\langle f, T^{-1}g\right\rangle \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 16. *Insbesondere gilt für den hier verwendeten Operator $\mathscr{F}$ die untenstehende Gleichung:*

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle = \langle f, \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}g\rangle = \langle f, g\rangle \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Die letze Identität kann auch mit der Polarisierungsformel gezeigt werden, was wir im folgenden machen möchten:

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle &= \frac{1}{4}(\|\hat{f} + \hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f} - \hat{g}\|_2^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2) = \langle f, g\rangle.\end{aligned}$$

Nun kommen wir endlich zum Theorem von Plancherel, mit welchem wir insbesondere die Fourrierinversion von $L^2(\mathbb{R}^n)$ Funktionen berechnen können.

Theorem 17 (Plancherel)**.**

1. *$\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein unitärer Operator.*

2. *Die inverse Abbildung $\mathscr{F}^{-1}$ von $\mathscr{F}$ bekommt man mittels*

$$(\mathscr{F}^{-1}f)(x) = (\mathscr{F}f)(-x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. 1. Die Linearität ist eine direkte Konsequenz der Definition. Isometrie folgt aus $\|\mathscr{F}f - \mathscr{F}g\|_2 = \|f-g\|_2$ (Bemerkung 14). Die Isometrie impliziert die Injektivität. Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathscr{F}$ surjektiv ist.

Beh. 1 Das Bild von $\mathscr{F}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Wir schreiben $W := \mathscr{F}(L^2)$ und betrachten die bijektive Abbildung $\mathscr{F} : L^2 \to W$. Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W$ eine Cauchyfolge. Da $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, existiert $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Wegen der Bijektion gibt es für alle g_n genau eine Funktion $f_n \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathscr{F}f_n = g_n$. Mit der selben Überlegung, die bereits gemacht wurde, zeigt man, dass f_n eine Cauchyfolge ist. Somit existiert $f \in W$, so dass $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ und es gilt

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|g_n - \mathscr{F}f\|_2 = \|g - \mathscr{F}f\|_2\,.$$

Also erhalten wir $g = \mathscr{F}f \in W$. □

Beh. 2 $\mathscr{F}$ ist surjektiv.

Beweis. Mit den vorherigen Überlegungen genügt es zu zeigen, dass $W = L^2(\mathbb{R}^n)$. Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen somit an: $W \neq L^2(\mathbb{R}^n)$. Da $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum ist, können wir diesen Raum als direkte Summe $L^2 = W \oplus W^\perp$ darstellen. Somit existiert $0 \neq f \in W^\perp$, so dass $\langle f, \hat{g}\rangle = 0$ für alle $\hat{g} \in W$. Dann erhalten wir die folgende Gleichung

$$0 = \langle f, \hat{g}\rangle \overset{\text{Bem.16}}{=} \langle \hat{f}, g\rangle \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Somit folgt $\hat{f} \in (L^2)^\perp = \{0\}$ und das impliziert, dass $\hat{f} = 0$. Dies führt aber zu einem Widerspruch wegen $0 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \neq 0$. □

2. Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Weiter definieren wir die Folge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ wie folgt

$$f_N(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_N(t) e^{2\pi i x\cdot t} dt,$$

wobei

$$\hat{f}_N(t) = \begin{cases} \hat{f}(t) & , |t| \leq N \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Mit den selben Überlegungen, die bisher gemacht wurden, zeigt man, dass f_N eine Cauchyfolge und dass $\hat{f}_N \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Insbesondere gilt $\hat{f}_N \to \hat{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nach Definition von f_N gilt $f_N \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Somit existiert $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_N \to \tilde{f}$ für $N \to \infty$. Weiter berechnen wir folgendes Skalarprodukt und zeigen mit dem Satz von Riesz, dass $\tilde{f} = f$.

$$\begin{aligned}\langle g, \tilde{f} \rangle &= \lim_{N\to\infty} \langle g, f_N \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \hat{g}, \hat{f}_N \rangle \\ &= \langle \hat{g}, \hat{f} \rangle = \langle g, f \rangle \qquad \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \lim_{N\to\infty} f_N(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_N(t) e^{2\pi i x\cdot t} dt = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_N(t) e^{(-1)^2 2\pi i x \cdot t} dt \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_N(t) e^{-2\pi i (-x)\cdot t} dt = \mathscr{F}(\hat{f})(-x).\end{aligned}$$

Es gilt also

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \mathscr{F}(\hat{f})(-x)$$

und dies impliziert

$$(\mathscr{F}^{-1} f)(x) = (\mathscr{F} f)(-x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

□

4 Anwendungsbeispiel

Im diesem Abschnitt konzentrieren wir uns auf die Poisson-Gleichung. Wir gehen davon aus, dass die gegebene Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist und suchen eine Funktion u, die die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$-\Delta u + u = f.$$

Bevor wir die Fourriertransformation der Poisson-Gleichung berechnen, wollen wir noch die folgende Bemerkung machen.

Bemerkung 18. *Ist u nach t_j stetig differentierbar und $\frac{\partial u(t)}{\partial t_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\widehat{\frac{\partial u(t)}{\partial t_j}}(x) = 2\pi i x_j \hat{u}(x)$.*

Nun sind wir bereit die Fourriertransformation der Poisson-Gleichung zu berechnen

$$\begin{aligned}\widehat{-\Delta u + u} &= \hat{f}. \\ \widehat{-\Delta u} + \hat{u} &= \hat{f}.\end{aligned}$$

Mit Bemerkung 18 berechnen wir

$$\widehat{\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_j^2}} = i x_j \widehat{\frac{\partial u(t)}{\partial t_j}} = -x_j^2 \hat{u}.$$

Somit erhalten wir

$$\widehat{-\Delta u} = -\sum_{j=1}^{n} \widehat{\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_j^2}} = -\sum_{j=1}^{n} -x_j^2 \hat{u} = |x|^2 \hat{u}(x).$$

Darum

$$|x|^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f}.$$

$$\hat{u}(x) = \frac{\hat{f}(x)}{1 + |x|^2}.$$

Da $1 + |x|^2 \geq 1$, gilt

$$\frac{\hat{f}(x)}{1 + |x|^2} \leq \hat{f}(x).$$

Nach unserer Annahme ist $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, somit auch $\hat{u}$. Nun ist es leicht die Funktion u mit Hilfe des Theorems von Plancherel herzuleiten, d.h. wir berechnen die Fourrierinversion von $\hat{u}$.
Dieses Beispiel motiviert auch die folgende Definition vom Sobolev-Raum

Definition 19. *Sei $s \in \mathbb{R}$, dann ist der Sobolev-Raum definiert als*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |t|^2)^{s/2} \hat{f}(t) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Die aus der Poisson-Gleichung erhaltene Funktion u ist somit ein Element des Sobolev-Raumes $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 20. *Ist $s \geq 0$, dann folgt, dass $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Für $s = 0$ erhalten wir $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Für den übrig gebliebenen Fall, d.h. $s < 0$, sind die Elemente vom Sobolev-Raum diejenigen Funktionen, die gegen unendlich nicht schneller als Polynome beliebigen Grades wachsen. Diese Funktionen sind im Raum der temperierten Distributionen enthalten.*

Oft wird der Sobolev-Raum auf eine andere Art definiert. Diese Definition möchten wir nun angeben.

Definition 21. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Der Sobolev-Raum $W^{k,p}(U)$ ist der Raum der Funktionen, deren partielle Ableitungen bis auf Ordnung k in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegen. Durch*

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(U)}^p \right)^{1/p},$$

bzw.

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(U)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(U)}$$

ist die Norm auf $W^{k,p}(U)$ definiert, wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex ist und $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.

Im Fall $k \in \mathbb{N}$ und $p = 2$ sind diese beiden Definitionen vom Sobolev-Raum äquivalent. Der Vorteil von Definition 21 ist, dass p beliebig gewählt werden kann, jedoch muss k in $\mathbb{N}$ sein.

5 Fourriertransformation auf L^p, $1 \le p \le 2$

Bisher kennen wir die Fourriertransformation für Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und Funktionen in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Den Raum $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ kann man somit wie folgt definieren:

Definition 22. *Der Raum $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ enthält alle Funktionen $f = f_1 + f_2$, s.d. $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Nun stellt sich die Frage, wie die Fourriertransformation von $f = f_1 + f_2$ aussieht. Wir setzen $\widehat{f_1 + f_2} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$. Dieser Ausdruck ist wohldefiniert, wie man sich im Folgenden überzeugen kann.
Ist $g_1 + g_2 = f_1 + f_2$, wobei $g_i \in L^i(\mathbb{R}^n)$ für $i = 1, 2$. Dann ist $g_1 - f_1 = f_2 - g_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Da die Fourriertransformation von $g_1 - f_1$ und $g_2 - f_2$ auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ dem Ausdruck $\hat{g}_1 - \hat{f}_1$ bzw. $\hat{g}_2 - \hat{f}_2$ entspricht, folgt aus $\hat{g}_1 - \hat{f}_1 = \hat{g}_2 - \hat{f}_2$, dass $\hat{g}_1 + \hat{g}_2 = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$.

Bemerkung 23. *Der Raum $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ enthält den Raum $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p \le 2$.*

Satz 24 (Hausdorff-Young)**.** *Sei $1 \le p \le 2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann lässt sich die Fourriertransformation $\mathscr{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ zu einem Operator fortsetzen, der beschränkt und linear ist, d.h*

$$\exists A > 0 \text{ } mit \text{ } \|\mathscr{F} f\|_q \le A \|f\|_p .$$

Wir verweisen den Leser darauf, die Arbeit über das Marcienkiewicz Interpolationstheorem zu lesen, weil wir in diesem Beweis viele Resultate aus dieser Arbeit brauchen werden.

Beweis. Wir betrachten 3 Fälle:

1. $p = 1$, $q = \infty$. Es folgt sofort, dass $A = 1$.

2. $p = 2$, $q = 2$. Hier erhalten wir wieder $A = 1$.

3. $1 < p < 2$. In diesem Fall benutzen wir den Satz von Marcienkiewicz und setzen $p_0 = 1$, $q_0 = \infty$ und $p_1 = 2$, $q_1 = 2$. Wir betrachten den Operator
$$\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n) \supset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n),$$
der linear ist. Somit ist $\mathscr{F}$ auch sublinear. Weiter gilt, dass $\mathscr{F}$ stark-(p_0, q_0), stark-(p_1, q_1). Für $0 < t < 1$ definieren wir folgendes
$$\frac{1}{p} := \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2}.$$
$$\frac{1}{q} := \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.$$
Mit dem Satz von Marcienkiewicz wissen wir, dass eine Konstante $A > 0$ existiert, so dass
$$\|\mathscr{F}\|_q \le A \|f\|_p,$$
wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = 1$.

□

Literatur

[1] Brown, Russel: *Lecture notes: harmonic analysis* (2001).

[2] Diaz-Espinoza, Oliver: *Basic topics in harmonic analysis I: Fourier-transform and Plancherel theorem.*

[3] Fröhlich, Mathias: *Exponentielle Integrationsverfahren für die Schrödinger-Poisson-Gleichung* (2004).

[4] Koch, Herbert: *Skript zu den Vorlesungen Partielle Differentialgleichungen 1 und 2.*

[5] Stein E., Weiss G.: *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1971).

[6] *Notizen vom Seminar in Harmonischer Analysis mit Professor Struwe* (2007)