ETH Zürich

(Pro)Seminar: Grundideen der Harmonischen Analysis

Schwartz Raum und gemässigte Distributionen

David Bernhardsgrütter und David Umbricht

18. Dezember 2007

Schwartz Raum und gemässigte Distributionen

In dieser Arbeit befassen wir uns mit dem Schwartz Raum und der Theorie der Distributionen. Eine Distribution ist ein Funktional auf einem Testfunktionenraum, d.h. eine lineare und stetige Abbildung in die reellen Zahlen. Als Testfunktionenraum stehen uns zwei Modelle zur Verfügung. Zum einen haben wir den Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger $\mathscr{D}$. Die andere Idee führt uns zum Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen, die schnell abfallen. Dieser Raum wird Schwartz Raum $\mathscr{S}$ genannt, nach dem Mathematiker Laurent Schwartz. Zur Definiton des Schwartz Raumes gelangt man, wenn man einen Funktionenraum sucht, dessen Elemente unter Differenzierung, Fourier Transformation, Faltung und Translation im selben Raum bleiben. Der Schwartz Raum und Distributionen finden heute auch wichtige Verwendung in der Physik und Elektrotechnick.

Definition 1. Wir definieren die zwei *Testfunktionenräume.*

i) Der *Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger* definieren wir mit

$$\mathscr{D}\left(\mathbb{E}_n\right) = C_0^\infty\left(\mathbb{E}_n\right) \ := \left\{\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{E}_n\right) \mid \operatorname{supp}\left\{\varphi\right\} \ \text{kompakt}\right\}$$

und nennen ihn kurz $\mathscr{D}$.

ii) Den *Schwartz Raum* definieren wir mit

$$\mathscr{S}\left(\mathbb{E}_n\right) := \left\{\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{E}_n\right) \ \middle| \ \sup_{x\in\mathbb{E}_n} \left|x^\alpha \left(D^\beta\varphi\right)(x)\right| < \infty \quad \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n\right\}$$

und nennen ihn kurz $\mathscr{S}$.

Bemerkung 2. Der Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger $\mathscr{D}$ ist eine Teilmenge von $\mathscr{S}$.

Wir stellen auch fest, dass eine Funktion $\varphi \in \mathscr{S}$ multipliziert mit einem Polynom p in n Variablen wiederum im Schwartz Raum ist.

Beispiel 1.

i) Die Funktion $e^{-\delta|x|^2}$ ist im Schwartz Raum enthalten für alle $\delta > 0$.

ii) Wir defnieren eine Funktion

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

welche beschränkt ist und deren Ableitungen genau so beschränkt sind. Daraus konstruieren wir nun eine weitere Funktion, die in $\mathscr{D}$ und damit auch in $\mathscr{S}$ liegt.

$$\Phi(x) := \varphi(1+x) \cdot \varphi(1-x) = \begin{cases} e^{-2/\left(1-x^2\right)} & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Als nächstes sehen wir, dass der Schwartz Raum in den Räumen C_0, dem Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, und $L^p(\mathbb{E}_n)$ für alle $1 \leq p < \infty$ enthalten ist.

Lemma 3.

i) $\mathscr{S} \subset C_0$

ii) $\mathscr{S} \subset L^p(\mathbb{E}_n) \qquad$ für alle $1 \leq p < \infty$

Beweis. Wir beweisen kurz die zweite Aussage.
Sei $\varphi \in \mathscr{S}$, $A = \|\varphi\|_\infty$ und $B = \sup_{x \in \mathbb{E}_n} |x|^{2n} |\varphi(x)| < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{E}_n} |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p} &\leq \left(\int_{|x| \leq 1} |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{|x| > 1} |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq A \left(\int_{|x| \leq 1} 1 \, dx \right)^{1/p} + B \left(\int_{|x| > 1} |x|^{-2np} \, dx \right)^{1/p} \\ &= A \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} \right)^{1/p} + B \left(\frac{\omega_{n-1}}{(2p-1)\,n} \right)^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

□

Wie bereits zu Anfang erwähnt sollen Funktionen aus dem Schwartz Raum auch unter Fourier Transformation und Faltung wiederum Elemente des Schwartz Raumes sein.

Satz 4.

i) Für $\varphi \in \mathscr{S}$ gilt $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}$.

ii) Für $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$ gilt $\varphi * \psi \in \mathscr{S}$.

Wir wissen dass $(\varphi * \psi)\hat{} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$ gilt und das Produkt zweier Funktionen aus dem Schwartz Raum $\mathscr{S}$ wiederum in $\mathscr{S}$ liegt. Zusammen mit der ersten Aussage und der inversen Fourier Transformation ergibt sich dann direkt die zweite Aussage.
Als nächstes führen wir eine Metrik auf $\mathscr{S}$ ein, wodurch wir einen topologischen Vektorraum erhalten.

Definition 5. Sei $\varphi \in \mathscr{S}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Wir definieren zunächst

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{E}_n} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right|.$$

Somit gelangen wir zu einer Metrik $d'_{\alpha,\beta}(\varphi, \psi) = \rho_{\alpha,\beta}(\varphi - \psi)$ auf dem Schwartz Raum. Die Menge der Paare von n-Tupeln (α, β) ist abzählbar und wir erhalten mit $d'_1, d'_2, \ldots$ eine Abzählung der Metriken $d'_{\alpha,\beta}$.
Sei nun $d_n = d'_n / (1 + d'_n)$. Dieses d_n ist eine äquivalente Metrik zu d'_n und ist beschränkt mit $d_n \leq 1$ für alle n.
Schlussendlich haben wir mit

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n$$

eine beschränkte Metrik auf dem Schwartz Raum $\mathscr{S}$. Diese Metrik definiert von nun an auch die Topologie auf $\mathscr{S}$.

Eine Folge von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ konvergiert $\varphi_k \to \varphi$ in der Metrik d natürlich genau dann, wenn $\varphi_k \to \varphi$ für jedes d_n konvergiert.
Die Addition zweier Funktionen und das multiplizieren mit einer Zahl aus $\mathbb{E}$ sind damit auch stetig und wir haben einen topologischen Vektorraum $(\mathscr{S}, d)$. Von nun an werden wir immer diese Metrik verwenden.

Bemerkung 6.

i) Die Abbildung $\varphi(x) \to x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ ist stetig.

ii) Falls $\varphi \in \mathscr{S}$ dann folgt $\lim_{h \to 0} \tau_h \varphi = \varphi$, wobei τ_h die Translation in Richtung h ist.

iii) Sei $\varphi \in \mathscr{S}$ und $h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0)$ ein Vektor in $\mathbb{E}_n$. Dann konvergiert der Differenzen Quotient $(\varphi - \tau_h \varphi) / h_i$ nach $\partial \varphi / \partial x_i$ für $|h| \to 0$.

iv) Der Schwartz Raum $\mathscr{S}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

v) Die Fourier Transformation is ein homöomorphismus von $\mathscr{S}$ auf sich selbst.

vi) $\mathscr{D}$ is ein dichter Teilraum von $\mathscr{S}$.

vii) $\mathscr{S}$ ist separabel.

viii) Eine konvergente Folge $x_n \to x$ in $\mathscr{S}$, konvergiert auch in L^p.

Als nächstes führen wir den Begriff der gemässigten Distribution ein.

Definition 7. Die Menge $\mathscr{S}'$ aller stetigen linearen Funktionale auf $\mathscr{S}$ ist der *Raum der gemässigten Distributionen*.

Beispiel 2. Wir geben nun einige einfache Beispiele für gemässigte Distributionen.

i) Sei $f \in L^p(\mathbb{E}_n)$ mit $1 \leq p \leq \infty$. Das Funktional

$$L_f(\varphi) := \int_{\mathbb{E}_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

für $\varphi \in \mathscr{S}$ ist eine gemässigte Distribution. Dass das Funktional linear ist, sieht man sofort. Die Stetigkeit bedürfte einer kleinen Rechnung.

ii) Sei μ ein endliches Borel Mass. Das Funktional

$$L_\mu(\varphi) := \int_{\mathbb{E}_n} \varphi(x)\,d\mu$$

für $\varphi \in \mathscr{S}$ ist eine gemässigte Distribution.

iii) Sei ein Punkt $x_0 \in \mathbb{E}_n$ fest gewählt und ein n-Tupel $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Das Funktional

$$L(\varphi) := D^\beta \varphi(x_0)$$

für $\varphi \in \mathscr{S}$ ist eine gemässigte Distribution. Ein Spezialfall ist die Dirac δ-Funktion: $L(\varphi) = \varphi(0)$.

iv) Eine messbare Funktion f für die gilt, dass $f(x) / \left(1 + |x|^2\right)^k$ in L^p liegt für ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $1 \leq p \leq \infty$, nennt man eine *gemässigte L^p Funktion*. Für den Fall $p = \infty$ nennt man eine solche Funktion auch *langsam wachsend*. Jede solche Funktionen führt uns zu einer gemässigten Distribution

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{E}_n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

für $\varphi \in \mathscr{S}$.

Im nächsten Satz sehen wir, dass es eine einfache aber wichtige Charakterisierung für die gemässigte Distributionen gibt.

Satz 8. Ein lineares Funktional L auf dem Schwartz Raum $\mathscr{S}$ ist genau dann eine gemässigte Distribution, wenn es eine Konstante $C > 0$ und ganze Zahlen $m, l \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$|L(\varphi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq l \\ |\beta| \leq m}} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathscr{S}$.

Wir werden nun zeigen, dass wichtige Operationen wie etwa Ableitung, Faltung oder Fourier Transformation auch auf dem Raum der gemässigten Distributionen $\mathscr{S}'$ definiert werden können. Als ertes falten wir eine gemässigte Distribution mit einer Testfunktion (also einer Funktion aus $\mathscr{S}$). Zu diesem Zwecke definieren wir noch die *Reflexion* $\tilde{g}$

$$\tilde{g}(x) := g(-x).$$

Mit dem Satz von Fubini wissen wir, dass $\int_{\mathbb{E}_n} (u * \varphi)(x)\, \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{E}_n} u(x)\, (\tilde{\varphi} * \psi)(x)\, dx$ für $u, \varphi, \psi \in \mathscr{S}$ gilt. Diese Gleichung motiviert uns zur Definition der Faltung einer gemässigten Distribution mit einer Testfunktion. Sei $u \in \mathscr{S}'$ und $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Dann setzen wir:

$$(u * \varphi)(\psi) := u(\varphi * \psi)$$

Satz 9. Seien $u \in \mathscr{S}'$ und $\varphi \in \mathscr{S}$, dann entspricht die Faltung $u * \varphi$ der Funktion f, welche im Punkt $x \in \mathbb{E}_n$ den Wert $f(x) = u(\tau_x \tilde{\varphi})$ annimmt. Ausserdem ist $f \in C^\infty$ und die Funktion sowie all ihre Ableitungen sind langsam wachsend.

Jetzt schreiten wir zu der Ableitung von gemässigten Distributionen. Partielle Integration impliziert $\int_{\mathbb{E}_n} \left(D^\beta u\right)(x)\, \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{E}_n} u(x) \left(D^\beta \varphi\right)(x)\, dx$ für $u, \varphi \in \mathscr{S}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Wir definieren daher die partielle Ableitung für gemässigte Distributionen folgendermassen:

$$\left(D^\beta u\right)(\varphi) := (-1)^{|\beta|} \cdot u\left(D^\beta \varphi\right).$$

für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathscr{S}'$.
Ähnlich können wir auch die Translation $\tau_h u$ und die Reflexion $\tilde{u}$ für eine gemässigte Distribution $u \in \mathscr{S}'$ definieren.

$$\begin{aligned} (\tau_h u)(\varphi) &:= u(\tau_{-h}\varphi) \\ \tilde{u}(\varphi) &:= u(\tilde{\varphi}) \end{aligned}$$

Aus der Fourier Theorie wissen wir, dass $u(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{E}_n} u(x)\, \hat{\varphi}(x)\, dx = \int_{\mathbb{E}_n} \hat{u}(x)\, \varphi(x)\, dx = \hat{u}(\varphi)$ für $u, \varphi \in \mathscr{S}$. Nun definieren wir somit für eine gemässigte Distribution $u \in \mathscr{S}'$

$$\hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi}).$$

Mit dieser Definition der Fourier Transformation haben wir auch gleich einen Isomorphismus von $\mathscr{S}'$ auf sich selbst erhalten.
Nun richten wir unser Augenmerk auf Funktionen $B : L^p(\mathbb{E}_n) \to L^q(\mathbb{E}_n)$ und werden sehen, dass ein Zusammenhang zu gemässigten Distributionen besteht. Für den nächsten Satz brauchen wir aber zusätzlich die folgenden Bemerkungen:

Bemerkung 10.

i) Die Abbildung $f \to \hat{f}$ ist eine beschränkte lineare Transformation von $L^1(\mathbb{E}_n)$ nach $L^\infty(\mathbb{E}_n)$ und es gilt $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

ii) Falls $f \in L^1(\mathbb{E}_n)$, dann ist $\hat{f}$ gleichmässig stetig.

iii) Sei P ein Polynom in den Variablen $x_1, ..., x_n$ und *P(D)* der entsprechende Differentialoperator (d.h. x^α wird durch D^α ersetzt). Dann gilt für jedes $f \in L^1(\mathbb{E}_n)$ mit $P(D)f \in L^1(\mathbb{E}_n):\ (P(D)f)\hat{}\,(x) = P(2\pi i x)\hat{f}(x)$.

iv) Sind $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{E}_n)$, dann gilt $f(x) = \int_{\mathbb{E}_n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x t} dt$ für fast alle $x \in \mathbb{E}_n$. Da $\hat{f}$ integrabel und nach ii) stetig ist, definiert das Integral $\int_{\mathbb{E}_n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x t} dt$ eine stetige Funktion.

Die Aussagen i) und ii) sind schnell einzusehen, für die beiden anderen Aussagen müsste man mehr arbeiten. Wir wollen den Beweis hier jedoch nicht durchführen.

Satz 11. Sei $B : L^p(\mathbb{E}_n) \to L^q(\mathbb{E}_n),\ 1 \leq p, q \leq \infty$, linear, beschränkt und B kommutiere mit Translationen (d.h. $\tau_h B = B \tau_h$). Dann existiert eine eindeutig bestimmte gemässigte Distribution u, so dass $B\varphi = u * \varphi$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}$.

Um die Aussage von Satz 11 besser verstehen zu können, betrachten wir den Fall $n = 1$. Falls sich u „brav“ verhält, so lässt sich $B\varphi(x) = u * \varphi(x)$ durch die entsprechende Riemann-Summe annähern:

$$(B\varphi)(x) = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(t_k)\varphi(x - t_k)(t_k - t_{k-1}) = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(x - t_k)$$

Das heisst, B wird durch eine Linearkombination von Translationsoperatoren approximiert. Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir das folgende Lemma, das für sich genommen schon ein interessantes Resultat darstellt.

Lemma 12. Sei $f \in L^p(\mathbb{E}_n)$. Falls alle Ableitungen der Ordnung $\leq n+1$ in der L^p-Norm existieren, dann entspricht f fast überall einer stetigen Funktion g und es gilt

$$|g(0)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|D^\alpha f\|_p \,,$$

wobei C nur von der Dimension n und von p abhängt.

Die Bedingung an f kann auch folgendermassen beschrieben werden: $f \in W^{n+1,p}(\mathbb{E}_n)$, wobei $W^{n+1,p}(\mathbb{E}_n) := \Big\{ f \in L^p(\mathbb{E}_n) \mid \|D^\alpha f\|_p < \infty \quad \forall \, |\alpha| \leq n+1 \Big\}$
$W^{n+1,p}$ wird *Sobolev-Raum* genannt (denen wir schon bei der Lösbarkeit der Laplace-Gleichung begegnet sind). Wir haben also die Einbettung $W^{n+1,p}(\mathbb{E}_n) \subset C^0(\mathbb{E}_n)$. Die Aussage des Lemmas ist nicht völlig offensichtlich, denn die Funktion $f \in L^p$ ist nicht punktweise definiert. Falls aber die Ableitungen wie oben beschrieben kontrolliert werden können, so kann man f auf einer Nullmenge so verändern, dass eine stetige Funktion resultiert.
Wir geben zuerst den Beweis des Lemmas:

Beweis. (Lemma 12)
Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}_n$. Es gilt

$$\Big(1 + |x|^2\Big) = \Big(1 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\Big) \leq \Big(1 + |x_1| + \ldots + |x_n|\,\Big)^2$$

und somit

$$\Big(1 + |x|^2\Big)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \leq \Big(1 + |x_1| + \ldots + |x_n|\,\Big)^{n+1} \leq C' \sum_{|\alpha|\leq n+1} |x^\alpha| \,, \tag{1}$$

wobei $C' = C'(n)$.
Sei zunächst $\mathbf{p = 1}$. Ziel ist es, Bem. 10, iv) anzuwenden. Da $f \in L^1$, muss nur noch $\hat{f} \in L^1$ gezeigt werden.
Mit (1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\big|\hat{f}(x)\big| \quad &\leq \quad C' \Big(1 + |x|^2\Big)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} |x^\alpha| \big|\hat{f}(x)\big| \\
&\overset{\text{Bem. 10 } iii)}{=} \quad C' \Big(1 + |x|^2\Big)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \Big| \Big((2\pi)^{-|\alpha|}\, D^\alpha f\Big)\hat{}\,(x) \Big| \\
&\overset{\text{Bem. 10 } i)}{\leq} \quad C' \Big(1 + |x|^2\Big)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|D^\alpha f\|_1 \,,
\end{aligned}$$

da $(2\pi)^{-|\alpha|} \leq 1$.
Und somit das gewünschte Resultat

$$\|\hat{f}\|_1 = \int_{\mathbb{E}_n} |\hat{f}| dx \leq C \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|D^\alpha f\|_1 ,$$

wobei

$$\begin{aligned} C &= C(n) = C' \int_{\mathbb{E}_n} \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{-(n+1)}{2}} dx = C' \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(1 + r^2\right)^{\frac{-(n+1)}{2}} r^{n-1} dx' dr \\ &= \omega_{n-1} \int_0^\infty \underbrace{\frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{\frac{(n+1)}{2}}}}_{=O(r^{-2}), r \to \infty} dr < \infty. \end{aligned}$$

(Wir sind zu „Polarkoordinaten“ (r, x') übergegangen: $r = |x|$, $x' = x/|x|$ für $x \neq 0$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}_n \mid |x| = 1\}$ und ω_{n-1} beschreibe den Flächeninhalt von $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{E}_n$.)
Nach Bem. 10, iv) gilt also $f(x) = g(x) = \int_{\mathbb{E}_n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x t} dt$ fast überall, mit

$$|g(0)| = \left| \int_{\mathbb{E}_n} \hat{f}(t) dt \right| \leq \|\hat{f}\|_1 \leq C \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|D^\alpha f\|_1 .$$

Dies zeigt das Lemma im Fall $p = 1$.
Wir können uns nun dem Fall **p>1** zuwenden, der auf $p = 1$ zurückgeführt werden soll. Wähle ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{E}_n, [0, 1])$ mit $\varphi(x) = 1, |x| \leq 1$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| > 2$.
Beh: φf erfüllt die Bedingungen des Lemmas für $p = 1$.
Bew: Mit $f \in L^p(\mathbb{E}_n)$ folgt $f \in L^p(B_2(0))$ und, da $|\varphi f(x)| \leq |f(x)|$, gilt $\varphi f \in L^p(B_2(0)) \subset L^1(B_2(0))$. Da $\varphi f(x) \equiv 0$ für $|x| > 2$, haben wir $\|\varphi f\|_{L^1(\mathbb{E}_n)} = \|\varphi f\|_{L^1(B_2(0))} < \infty$.
Es gilt $D^\alpha(\varphi f) = \sum_{\mu+\nu=\alpha} C^{\mu\nu} (D^\mu f)(D^\nu \varphi)$. Setze $C := \max_{\mu+\nu=\alpha} C^{\mu\nu}$ und sei q zu p konjugiert. Dann gilt für alle $|\alpha| \leq n + 1$:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(\varphi f)\|_1 &\leq \int_{|x| \leq 2} \sum_{\mu+\nu=\alpha} C^{\mu\nu} |D^\mu f| \, |D^\nu \varphi| \, dx \\ &\leq \sum_{\mu+\nu=\alpha} C \|D^\nu \varphi\|_\infty \int_{|x| \leq 2} |D^\mu f| \, dx \\ &\leq \underbrace{C \max_{|\nu| \leq |\alpha|} \|D^\nu \varphi\|_\infty}_{=:D} \sum_{|\mu| \leq |\alpha|} \int_{|x| \leq 2} |1 \cdot D^\mu f| \, dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} D \sum_{|\mu| \leq |\alpha|} \|1\|_{L^q(B_2(0))} \|D^\mu f\|_{L^p(B_2(0))} < \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

(Beachte, dass $\|1\|_{L^q(B_2(0))}$ nur von p und der Dimension n abhängt.) Daraus folgt die Behauptung.
Also entspricht φf fast überall einer stetigen Funktion h mit $|h(0)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|D^\alpha(\varphi f)\|_1$.
Da $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$, ist f fast überall gleich einer stetigen Funktion g in $B_1(0)$ und es existiert eine Konstante K, so dass

$$|g(0)| = |h(0)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|D^\alpha(\varphi f)\|_1 \stackrel{(2)}{\leq} K \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|D^\alpha f\|_p .$$

Durch eine entsprechende Anpassung von φ lässt sich dieses Argument für beliebige Bälle $B_r(0)$, $r > 0$, wiederholen. Somit ist das Lemma bewiesen. □

Wir können nun zum Beweis von Satz 11 übergehen:

Beweis. (Satz 11)
Beh: Sei $\varphi \in \mathscr{S}$ und B wie oben, dann gilt $\|D^\alpha B\varphi\|_q < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
Bew: Sei $h = (0, \dots, h_j, \dots 0)$, dann gilt $\frac{\tau_h(B\varphi)-B\varphi}{h_j} = \frac{B(\tau_h\varphi)-B\varphi}{h_j} = B(\frac{\tau_h\varphi-\varphi}{h_j})$. Nach Eigenschaft 6. iii) gilt $\frac{\tau_h\varphi-\varphi}{h_j} \to -\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} =: -\varphi_j$ in $\mathscr{S}$ und somit auch in L^p (Eigenschaft 6. viii)).
Da B beschränkt ist, können wir abschätzen:

$$\left\| \frac{\tau_h(B\varphi) - B\varphi}{h_j} + B(\varphi_j) \right\|_q \leq \|B\|_{L(L^p,L^q)} \left\| \frac{\tau_h\varphi - \varphi}{h_j} + \varphi_j \right\|_p \to 0 \ (h \to 0),$$

d.h. $\frac{\tau_h(B\varphi)-B\varphi}{h_j} \to -\frac{\partial B\varphi}{\partial x_j} = -B\varphi_j$ in L^q. Das Argument lässt sich beliebig oft wiederholen und damit folgt die Behauptung.
Aus dem Beweis folgt zusätzlich, dass $D^\alpha(B\varphi) = B(D^\alpha\varphi)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
Mit Lemma 12 entspricht $B\varphi$ fast überall einer stetigen Funktion g_φ mit

$$\begin{aligned} |g_\varphi(0)| \quad &\leq \quad C \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|D^\alpha(B\varphi)\|_q \ = \ C \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|B(D^\alpha\varphi)\|_q \\ &\leq \quad \|B\|_{L(L^p,L^q)}\, C \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|D^\alpha\varphi\|_p . \end{aligned}$$

Mit dieser Ungleichung und Satz 8 folgt, dass die lineare Abbildung $\varphi \to g_\varphi(0)$ eine gemässigte Distribution u_1 ist (denn wir können analog zum Beweis von 3. ii) die L^p-Norm eines $\psi \in \mathscr{S}$ durch eine Linearkombination von L^∞-Normen von Termen der Form $x^\alpha\psi(x)$ abschätzen).
Beh: $u = \tilde{u_1}$ ist die gemässigte Distribution, die wir suchen, d.h. es gilt $B\varphi = u * \varphi$.
Bew: Sei $\varphi \in \mathscr{S}$. Es gilt

$$\begin{aligned} (u * \varphi)\,(x) \quad &\stackrel{\text{Satz 9}}{=} \quad u(\tau_x\tilde{\varphi}) = u([\tau_{-x}\varphi]\tilde{}\,) = \tilde{u}(\tau_{-x}\varphi) \\ &= \quad u_1(\tau_{-x}\varphi) = (B(\tau_{-x}\varphi))(0) = (\tau_{-x}B\varphi)(0) = (B\varphi)(x). \end{aligned}$$

Da u nach Konstruktion eindeutig ist, ist der Satz hiermit bewiesen. □

Kombinieren wir die Aussagen der Sätze 11 und 9, so erhalten wir das Ergebnis, dass $B\varphi$, für $\varphi \in \mathscr{S}$, fast überall einer langsam wachsenden C^∞-Funktion entspricht.

Sei nun (L^p, L^q) die Menge der gemässigten Distributionen u, für die ein $A > 0$ existiert, so dass $\|u * \varphi\|_q \leq A \|\varphi\|_p$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}$. Mit dem Satz 11 sehen wir, dass es eine Bijektion zwischen dieser Menge und der Menge der beschränkten linearen Operatoren $L^p(\mathbb{E}_n) \to L^q(\mathbb{E}_n)$, welche mit der Translation kommutieren, gibt. Für den Spezialfall $\left(L^2, L^2\right)$ erhalten wir eine einfache Beschreibung für die Menge dieser Distributionen.

Satz 13. Die Distribution u ist genau dann ein Element von $\left(L^2, L^2\right)$, wenn es ein $b \in L^\infty(\mathbb{E}_n)$ gibt, so dass $\hat{u} = b$. In dem Fall ist $\|b\|_\infty$ die Norm des Operators $B : L^2 \cap \mathscr{S} \to L^2$, der durch $B\varphi = u * \varphi$ definiert ist. Ausserdem gilt $(u * \varphi)\hat{} = \hat{u}\hat{\varphi}$.

Auch für den Spezialfall $\left(L^1, L^1\right)$ haben wir eine ähnliche Beschreibung für die Menge dieser Distributionen.

Satz 14. Die Distribution u ist genau dann ein Element von $\left(L^1, L^1\right)$, wenn sie ein endliches Borel Mass ist. In dem Fall entspricht die totale Variation von u der Norm des Operators $B : L^1 \cap \mathscr{S} \to L^1$, der durch $B\varphi = u * \varphi$ definiert ist.

Obschon wir keine generelle Charakterisierung für den Raum (L^p, L^q) kennen (und eine solche wahrscheinlich auch nicht existiert), haben wir ein allgemeines Resultat über die Dualität.

Satz 15. Falls $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ und $1/q + 1/q' = 1$, dann haben wir $(L^p, L^q) = (L^{q'}, L^{p'})$.

Wir haben nun gesehen, dass die Translation, Reflexion, Ableitung, Faltung und Fourier Transformation für Funktionen aus dem Schwartz Raum $\mathscr{S}$ wieder in $\mathscr{S}$ führen. Weiter haben wir diese Funktionen auch auf den Raum der gemässigten Distributionen $\mathscr{S}'$ definiert und gesehen, dass auch dort die Elemente aus $\mathscr{S}'$ in $\mathscr{S}'$ abgebildet werden. Ausserdem ist die Fourier Transformation eine Bijektion auf $\mathscr{S}$, als auch auf $\mathscr{S}'$.
Für den Raum (L^p, L^q) $(1 \leq p, q \leq \infty)$, der bijektiv zum Raum der linearen, beschränkten Funktionen $B : L^p \to L^q$, die mit der Translation kommutieren, ist, haben wir gezeigt, dass es immer eine eindeutige gemässigte Distribution u gibt, mit $B\varphi = u * \varphi$ für $\varphi \in \mathscr{S}$. Leider kennen wir keine allgemeine Beschreibung für die Räume (L^p, L^q). Jedoch lassen sich die Spezialfälle $p = q = 1, 2$ charakterisieren, und wir kennen auch ein Dualitätsresultat.