Singuläre Integrale

Veranschaulichung am Beispiel der Hilbert-Transformation

Zürich, Dezember 2007

Stefan Kraft
Dan Bühler

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Folgender Ausdruck, die so genannte Hilbert-Transformation, ist ein typisches Beispiel für ein singuläres Integral:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-y)}{y}\,dy$$

Wie der Name schon ahnen lässt, spielen Singularitäten eine entscheidende Rolle; so hat obiger Integrand offenbar eine solche im Nullpunkt wie auch an den „Integrationsgrenzen“ im Unendlichen.
Korrekterweise müsste das Integral demnach als geeigneter Grenzwertprozess aufgefasst werden – und dann bleibt natürlich die Frage offen, ob und unter welchen Voraussetzungen dieser überhaupt konvergiert. Genau mit Fragen solcher Art beschäftigt sich die Theorie der singulären Integrale.

Inhalt

Zunächst werden einige grundlegende Begriffe eingeführt und anschliessend drei wichtige Theoreme über singuläre Integrale in aufeinander aufbauender Struktur aufgeführt. Das erste dieser drei Theoreme – der Grundstein für alle weiteren Resultate – wird nicht bewiesen, da ein solches Vorhaben den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Das zweite hingegen wird ausführlich hergeleitet und vollständig bewiesen. Das dritte Theorem wiederum bleibt unbewiesen.

In einem zweiten Teil dieser Arbeit werden diese gewonnenen Resultate auf das bereits aufgeführte Beispiel der Hilbert-Transformation angewendet. Zusätzlich werden noch einige weitere Eigenschaften dieser speziellen Transformation gezeigt.

Als Literaturquelle für diese Arbeit diente *E. M. Stein: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Seiten 26 – 45. Der Vollständigkeit halber wird im Laufe dieser Arbeit an einigen Stellen auf dieses Werk verwiesen.

Ziel

Das Ziel dieser Arbeit liegt darin, eine kurze Einführung in die weitumfassende Theorie der singulären Integrale zu bieten. Anhand der vorgestellten Theoreme und der Veranschaulichung an der Hilbert-Transformation soll dem Leser ein Einblick in dieses Teilgebiet der Mathematik verschafft werden.

Singuläre Integrale

Grundlegende Begriffe

Seien im Folgenden $1 \leq p \leq \infty$ und X ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition
Ein Operator $T_K : X \to L^p(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(T_K f)(x) := (K * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)\,dy \qquad \text{für alle } f \in X$$

heisst *Faltungsoperator mit Kern K*, wobei $K \in X$ eine beliebige reellwertige Funktion ist.

Insbesondere Faltungsoperatoren kommutieren mit Translationen der Form $\tilde{\tau}_h f(x) = f(x+h)$ für $h \in \mathbb{R}^n$, wie man durch einfaches Ausrechnen sieht. Das bedeutet also, dass $(T\tilde{\tau}_h)\, f(x) = (\tilde{\tau}_h T)\, f(x)$, also $\tilde{\tau}_{-h} T \tilde{\tau}_h = T$ ist.
In Laufe dieses Kapitels werden Faltungsoperatoren mit *singulären* Kernen betrachtet. Der Kern soll dabei seine einzigen Singularitäten im Nullpunkt und im Unendlichen haben. Solche Faltungsoperatoren beschreiben *singuläre Integrale*, die als Grenzwertprozesse interpretiert werden.

Definition
Ein Faltungsoperator $T_K : X \to L^p(\mathbb{R}^n)$ mit singulärem Kern K wird wie folgt als Grenzwert definiert, falls dieser bezüglich der L^p-Norm existert.

$$T_K := \lim_{\varepsilon \to 0} T_K^\varepsilon \text{ , wobei } \quad (T_K^\varepsilon f)(x) := \int\limits_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y)K(y)\,dy \text{ für alle } f \in X$$

Damit ein solcher Grenzwert in einer gegebenen Norm existieren kann, muss notwendigerweise Beschränktheit in dieser Norm gegeben sein. Relevant sind in dieser Arbeit – wie oben angedeutet – die L^p-Normen.

Definition
Ein Operator $T : X \to L^p(\mathbb{R}^n)$ heisst *beschränkt auf $L^p(\mathbb{R}^n)$*, falls ein $A > 0$ existiert mit $\|Tf\|_{L^p} \leq A\,\|f\|_{L^p}$ für alle $f \in X$.

Konvergenzsätze

Um die Existenz der beschriebenen singulären Integrale nachzuweisen, wird anhand der nachfolgenden Theoreme gezeigt, dass sie unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen an ihren Kern in der L^p-Norm konvergieren. Diese L^p-Konvergenz garantiert die Existenz eines Grenzwerts und somit die des singulären Integrals.
Im folgenden Theorem gehen wir allerdings zuerst noch davon aus, dass $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass man $K * f$ direkt definieren kann.

Theorem 1
Seien $1 < p < \infty$ und $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Falls eine Konstante $B > 0$ existiert, so dass:

(1.1) $|\hat{K}(x)| \leq B$ *für fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$

(1.2) $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *mit* $|\nabla K(x)| \leq \dfrac{B}{|x|^{n+1}}$

Dann ist der Faltungsoperator $T_K : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ beschränkt auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung
T_K ist stetig fortsetztbar zu $\tilde{T}_K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{T}_K\big|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)} \equiv T_K$.

Beweis von Theorem 1:
Das Theorem wird ausführlich bewiesen in *E. M. Stein: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Seiten 29 – 33.

Die Konstante für die Beschränktheit von T_K hängt ausschliesslich von p, n und B ab. Insbesondere ist sie unabhängig von der Norm $\|K\|_{L^2}$. Daher ist die Voraussetzung, dass der Kern in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegen soll, noch unnötig einschränkend. Das Ziel wird nun sein, die Aussage auf einen allgemeineren Kern zu erweitern. Zu diesem Zweck wird hier zunächst noch ein Korollar zitiert, welches die Bedingung (1.2) durch eine schwächere ersetzt. Mithilfe dieses Korollars wird später das zweite Theorem hergeleitet.

Korollar
Seien $1 < p < \infty$ und $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Falls eine Konstante $B > 0$ existiert, so dass:

(K1) $|\hat{K}(x)| \leq B$ *für fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$

(K2) *für alle* $y \in \mathbb{R}^n$ *mit* $|y| > 0$: $\displaystyle\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B$

Dann ist der Faltungsoperator $T_K : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Die Konstante für die Beschränktheit A hängt nur von p, n und B ab.

Theorem 2
Seien $1 < p < \infty$ und $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Falls eine Konstante $B > 0$ existiert, so dass:

(2.1) *für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| > 0$:* $\quad |K(x)| \leq \dfrac{B}{|x|^n}$

(2.2) *für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| > 0$:* $\quad \displaystyle\int\limits_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B$

(2.3) *für alle $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < R_1 < R_2 < \infty$:* $\quad \displaystyle\int\limits_{R_1<|x|<R_2} K(x)\, dx = 0$

Dann existiert $T_K = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_K^\varepsilon : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$. Der so definierte Faltungsoperator ist zudem beschränkt auf $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Für den Beweis dieses Theorems sind nun einige Hilfsmittel nötig. Nachfolgend werden fünf Lemmata formuliert und bewiesen, die später im Beweis des Theorems Anwendung finden. Sei dazu $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und es existiere eine Konstante $B > 0$, so dass (2.1) bis (2.3) von K mit B erfüllt werden.

Definiere nun K^ε und K_ε für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$K^\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1} x)$$
$$K_\varepsilon(x) := \begin{cases} K(x) & \text{falls } |x| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{falls } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

Offensichtlich ist $K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1
Für jedes $\varepsilon > 0$ werden (2.1) bis (2.3) von K^ε mit B erfüllt.

Beweis:
Die Beweise für (2.1) und (2.3) sind trivial. Um (2.2) nachzuweisen, muss man die Variablentransformation $\tilde{x} := \varepsilon^{-1} x$ durchführen. □

Lemma 2
K erfülle die Bedingungen (2.1) bis (2.3) mit Konstante B. Dann existiert eine Konstante $C_1 > 0$, so dass K_1 (2.1) bis (2.3) mit $C_1 B$ erfüllt. Dabei hängt C_1 nur von n ab.

Beweis:
Da K die Voraussetzungen erfüllt, gilt für K_1:

(1) für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| > 0$: $\quad |K_1(x)| \leq \dfrac{cB}{|x|^n} \quad$ für alle $c \geq 1$

(2) Der Integrationsbereich $I := \{x \bigm| |x| \geq 2|y|\}$ wird unterteilt in die folgenden – wegen der Stetigkeit von $|\cdot|$ – Borel-messbaren Mengen:

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{x \bigm| |x| \geq 2|y|, |x| \geq 1, |x-y| \geq 1\} \\
M_2 &:= \{x \bigm| |x| \geq 2|y|, |x| \geq 1, |x-y| < 1\} \\
M_3 &:= \{x \bigm| |x| \geq 2|y|, |x| < 1, |x-y| \geq 1\} \\
M_4 &:= \{x \bigm| |x| \geq 2|y|, |x| < 1, |x-y| < 1\}
\end{aligned}$$

Auf M_1 gilt : $\displaystyle\int_{M_1} |K_1(x-y) - K_1(x)|\, dx = \int_{M_1} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B$

Für alle x und $y \in M_2$ gilt :

$1 \geq |x-y| \geq |x| - |y| \geq 2|y| - |y| = |y| > 0$, also $1 \leq |x| \leq |x-y| + |y| \leq 2$

Damit lässt sich M_2 wie folgt abschätzen :

$$\begin{aligned}
\int_{M_2} |K_1(x-y) - K_1(x)|\, dx &= \int_{M_2} |K(x)|\, dx \leq \int_{M_2} \frac{B}{|x|^n}\, dx \leq \int_{M_2} B\, dx \\
&\leq \int_{1 \leq |x| \leq 2} B\, dx = c_1 B \qquad \text{mit } c_1 := \int_{1 \leq |x| \leq 2} dx < \infty
\end{aligned}$$

Vollkommen analog folgt für M_3 :

$1 > |x| \geq |x-y| - |y| \geq 1 - |y| \geq 1 - \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{also } \int_{M_3} |K_1(x-y) - K_1(x)|\, dx &= \int_{M_3} |K(x-y)|\, dx \leq \int_{M_3} \frac{B}{|x-y|^n}\, dx \leq \int_{M_3} B\, dx \\
&\leq \int_{\frac{1}{2} < |x| < 1} B\, dx = c_2 B \qquad \text{mit } c_2 := \int_{\frac{1}{2} < |x| < 1} dx < \infty
\end{aligned}$$

Auf M_4 gilt schließlich $K_1(x-y) = K_1(x) = 0$, also $\displaystyle\int_{M_4} |K_1(x-y) - K_1(x)|\, dx = 0$

Insgesamt gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| > 0$: $\displaystyle\int_{|x| \geq 2|y|} |K_1(x-y) - K_1(y)|\, dy \leq (c_1 + c_2 + 1)B$

(3) Die Aussage folgt mit $K_1(x) = K(x)$ für $1 \leq |x|$ und $K_1(x) = 0$ sonst aus (2.3).

Alle Voraussetzungen werden von K_1 mit $C_1 B$ erfüllt, wobei $C_1 := \max\{c_1 + c_2 + 1, 1\}$.

□

Nun verallgemeinern wir das obige Lemma von $\varepsilon = 1$ auf beliebiges $\varepsilon > 0$.

Lemma 3
Für jedes $\varepsilon > 0$ werden (2.1) bis (2.3) von K_ε mit $C_1 B$ erfüllt.

Beweis:
Betrachte $\tilde{K} := K_1^{\frac{1}{\varepsilon}}$ mit $\tilde{K}(x) = \varepsilon^n K_1(\varepsilon x)$. Nach Lemma 1 und 2 werden die Voraussetzungen von $\tilde{K}$ mit $C_1 B$ erfüllt. Es gilt:

$$\tilde{K}^\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^{-n}\tilde{K}(\varepsilon^{-1}x) & \text{falls } |x| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{falls } |x| < \varepsilon \end{cases} = \begin{cases} K(x) & \text{falls } |x| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{falls } |x| < \varepsilon \end{cases} = K_\varepsilon(x) \qquad (\S 1)$$

Daher gilt $K_\varepsilon = \tilde{K}^\varepsilon$ und nach Lemma 1 werden (2.1) bis (2.3) von K_ε mit $C_1 B$ erfüllt.

□

Lemma 4
Es existiert eine Konstante $\hat{C}_1 > 0$, so dass gilt:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{K}_1(y)| \leq \hat{C}_1 B$$

Beweis:
Nach Lemma 2 erfüllt K_1 die Voraussetzungen mit $C_1 B$. Es gilt für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{K}_1(y) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|\leq R} K_1(x) e^{2\pi ixy}\,dx = \underbrace{\int\limits_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} K_1(x)e^{2\pi ixy}\,dx}_{=:I_1} + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{|y|}\leq|x|\leq R} K_1(x)e^{2\pi ixy}\,dx}_{=:I_2}$$

<u>Abschätzung von $|I_1|$:</u>

Allgemein gilt $\displaystyle\int\limits_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} K_1(x)\,dx = \int\limits_{1\leq|x|\leq\frac{1}{|y|}} K(x)\,dx \overset{(2.3)}{=} 0$

Wir können also die 0 subtrahieren und erhalten $\displaystyle I_1 = \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} K_1(x)(e^{2\pi ixy}-1)\,dx$

Also folgt mit dem Mittelwertsatz:

$$|I_1| \leq \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} |K_1(x)||e^{2\pi ixy}-1|\,dx \overset{MW.Satz}{\leq} \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} k_0|x||y||K_1(x)|\,dx \leq \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} k_0|x||y|\frac{B}{|x|^n}\,dx$$

$$= Bk_0|y| \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{|y|}} |x|^{-n+1}\,dx = Bk_0\omega_{n-1}|y| \int\limits_{r\leq\frac{1}{|y|}} r^{-n+1}\,r^{n-1}\,dr = B\,\underbrace{k_0\omega_{n-1}|y| \int\limits_{r\leq\frac{1}{|y|}} dr}_{=:k_1} = k_1 B$$

Dabei bezeichnet ω_{n-1} das Volumen der Sphäre S^{n-1}.

Abschätzung von $|I_2|$:

Definiere $z := \dfrac{y}{2|y|^2}$, dann gilt $|z| = \dfrac{1}{2|y|}$ und $e^{2\pi i y z} = -1$ (§2)

I_2 lässt sich ebenfalls durch passendes Addieren der 0 als Summe zweier leicht abschätzbarer Terme schreiben.

$$I_2 = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} \left(2\,\frac{1}{2}K_1(x) - \frac{1}{2}K_1(x-z) + \frac{1}{2}K_1(x-z)\right) e^{2\pi i x y}\, dx$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} \Big(K_1(x) - K_1(x-z)\Big) e^{2\pi i x y}\, dx}_{=:J_1}$$

$$+ \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x|\le R} K_1(x) e^{2\pi i x y}\, dx - \int\limits_{\frac{1}{|y|}\le|x+z|\le R} K_1(x) e^{2\pi i x y}\, dx\Big)}_{=:J_2}$$

J_2 ergibt sich aus einer einfachen Variablensubstitution.

Abschätzung von $|J_1|$:

Dies ist einfach, weil J_1 gerade die Form von Bedingung (2.2) hat :

$$|J_1| \le \frac{1}{2} \int\limits_{|x|\ge\frac{1}{|y|}} |K_1(x) - K_1(x-z)|\, dx \overset{(§2)}{=} \frac{1}{2} \int\limits_{|x|\ge 2|z|} |K_1(x) - K_1(x-z)|\, dx \overset{(2.2)}{\le} C_1 B$$

Abschätzung von $|J_2|$:

Der Großteil der Integralwerte heben sich in J_2 für $R \to \infty$ gegenseitig auf, es bleiben nur die folgenden Terme übrig :

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int\limits_{A_1} K_1(x) e^{2\pi i x y}\, dx}_{=:N_1} - \underbrace{\int\limits_{A_2} K_1(x) e^{2\pi i x y}\, dx}_{=:N_2} \right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} A_1 := \{x \mid |x+z| \le \frac{1}{|y|} \le |x|\} \\ A_2 := \{x \mid |x| \le \frac{1}{|y|} \le |x+z|\} \end{array}$$

Für $x \in A_1$ gilt: $\quad |x| \le |x+z| + |z| \le \dfrac{1}{|y|} + \dfrac{1}{2|y|} = \dfrac{3}{2|y|}$,

also $\quad A_1 \subset \left\{x \mid \dfrac{1}{|y|} \le |x| \le \dfrac{3}{2|y|}\right\} =: \tilde{A}_1$

Analog folgt mit $\quad |x| \ge |x+z| - |z| \ge \dfrac{1}{2|y|}$, dass $\quad A_2 \subset \left\{x \mid \dfrac{1}{2|y|} \le |x| \le \dfrac{2}{|y|}\right\} =: \tilde{A}_2$

$$\text{Es folgt:} \quad |N_1| \leq \int\limits_{A_1} |K_1(x)|\,dx \leq \int\limits_{\tilde{A}_1} \frac{C_1 B}{|x|^n}\,dx \leq C_1 B \omega_{n-1} \int\limits_{\frac{1}{|y|}}^{\frac{3}{2|y|}} r^{-n}\, r^{n-1}\,dr = C_1 B \omega_{n-1} \log \frac{3}{2}$$

$$= c_{N_1} B \quad \text{mit } c_{N_1} := C_1 \omega_{n-1} \log \frac{3}{2}$$

Analog gilt für N_2: $|N_2| \leq c_{N_2} B$ mit $c_{N_2} := C_1 \omega_{n-1} \log 2$

Fasst man zusammen, ergibt sich: $|J_2| \leq \frac{1}{2}(|N_1| + |N_2|) \leq \frac{1}{2}(c_{N_1} + c_{N_2})B$

Insgesamt folgt also:

$$|\hat{K}_1(y)| \leq |I_1| + |I_2| \leq \hat{C}_1 B \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |y| > 0$$

$$\text{für } \hat{C}_1 := k_1 + C_1 + \frac{1}{2}(c_{N_1} + c_{N_2})$$

□

Auch hier kann man von $\varepsilon = 1$ auf beliebiges $\varepsilon > 0$ verallgemeinern.

Lemma 5
Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{K}_\varepsilon(y)| \leq \hat{C}_1 B$$

Beweis:
Sei $L := K^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Nach Lemma 1 und 2 werden (2.1) bis (2.3) von L_1 mit $C_1 B$ erfüllt.
Weiter gilt:

$$\hat{L}_1^\varepsilon(x) = \left(\varepsilon^{-n} \widehat{L_1(\varepsilon^{-1} y)}\right)(x) = \hat{L}_1(\varepsilon x)$$

Und nach Lemma 4 gilt schliesslich:

$$|\hat{K}_\varepsilon(x)| \overset{(\S 1)}{=} |\hat{L}_1^\varepsilon(x)| = |\hat{L}_1(\varepsilon x)| \leq \hat{C}_1 B$$

□

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich Theorem 2 nun relativ leicht beweisen.

Beweis von Theorem 2:
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 3 und 5 erfüllt K_ε die Voraussetzungen (K1) und (K2) des Korollars. Somit ist der Faltungsoperator $T_{K_\varepsilon} = T_K^\varepsilon$ beschränkt auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, es gilt also $\|T_K^\varepsilon f\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$ für alle $\varepsilon > 0$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dabei ist A_p unabhängig von ε; daraus ergibt sich sofort, dass $\|T_K f\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}$, falls T_K^ε für $\varepsilon \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Um die Konvergenz zu zeigen, teilen wir das Integral wieder auf und subtrahieren die 0.

Betrachte zuerst $f_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(T_K^\varepsilon f_1)(x) &= \int\limits_{|y|\geq\varepsilon} K(y) f_1(x-y)\,dy = \int\limits_{|y|\geq 1} K(y) f_1(x-y)\,dy + \int\limits_{1\geq|y|\geq\varepsilon} K(y) f_1(x-y)\,dy \\
&\overset{(2.3)}{=} \int\limits_{|y|\geq 1} K(y) f_1(x-y)\,dy + \int\limits_{1\geq|y|\geq\varepsilon} K(y) f_1(x-y)\,dy - \int\limits_{1\geq|y|\geq\varepsilon} K(y) f_1(x)\,dy \\
&= \int\limits_{|y|\geq 1} K(y) f_1(x-y)\,dy + \int\limits_{1\geq|y|\geq\varepsilon} K(y)(f_1(x-y) - f_1(x))\,dy
\end{aligned}$$

Der erste Term ist die Faltung der L^1-Funktion f_1 mit der L^p-Funktion K_1 liegt also selbst in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Zudem ist der Ausdruck unabhängig von ε.

Um die Konvergenz des zweiten Summanden zu zeigen, genügt es nachzuweisen, dass es sich für $\varepsilon \to 0$ um eine Cauchyfolge handelt.

Nach dem Mittelwertsatz auf $B_1(0)$ existiert eine Konstante $A > 0$, so dass:
$|f_1(x-y) - f_1(x)| \leq A\,|y|$ (§3)

Für $\varepsilon > \delta > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{1\geq|y|\geq\varepsilon} K(y)(f_1(x-y) - f_1(x))\,dy - \int\limits_{1\geq|y|\geq\delta} K(y)(f_1(x-y) - f_1(x))\,dy \right| \overset{(§3)}{\leq} \int\limits_{\varepsilon\geq|y|\geq\delta} |K(y)| A |y|\,dy \\
&\quad \leq AB\omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon\geq r\geq\delta} r^{-n+1}\, r^{n-1}\,dr = AB\omega_{n-1}\mathcal{L}^n\big(B_\varepsilon(0) \setminus B_\delta(0)\big) \to 0 \quad \text{für } \varepsilon, \delta \to 0
\end{aligned}$$

Der zweite Summand konvergiert also gleichmäßig in x. Zudem hat er bezüglich x kompakten Support, weil $f_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Es folgt also, dass der zweite Term bezüglich $\|\cdot\|_{L^p}$ eine Cauchyfolge ist. Insgesamt konvergiert also $T_K^\varepsilon(f_1)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$.

Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\delta > 0$. Da $C_0^0(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt, existieren $f_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und $f_2 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_2\|_{L^p} \leq \delta$, so dass $f = f_1 + f_2$. Also gilt für $\varepsilon > \tilde{\delta} > 0$:

$$\begin{aligned}
\|T_K^\varepsilon f - T_K^{\tilde{\delta}} f\|_{L^p} &\leq \|\left(T_K^\varepsilon - T_K^{\tilde{\delta}}\right) f_1\|_{L^p} + \|\left(T_K^\varepsilon - T_K^{\tilde{\delta}}\right) f_2\|_{L^p} \\
&\leq \|\left(T_K^\varepsilon - T_K^{\tilde{\delta}}\right) f_1\|_{L^p} + 2A_p\delta \quad \text{für alle } \varepsilon > \tilde{\delta} > 0
\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\limsup_{\varepsilon,\tilde{\delta}\to 0} \|T_K^\varepsilon f - T_K^{\tilde{\delta}} f\|_{L^p} \leq 2A_p\delta$$

Somit folgt für $\delta \to 0$, dass es sich auch bei $T_K^\varepsilon f$ für $\varepsilon \to 0$ um eine Cauchyfolge in $L^p(\mathbb{R}^n)$ handelt, woraus die Konvergenz folgt.

□

Zusätzlich zur Kommutativität mit Translationen können Operatoren mit Dilatationen der Form $\tau_\varepsilon f(x) = f(\varepsilon x)$ für $\varepsilon > 0$ kommutieren: Für diese gilt also $T\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon T$ beziehungsweise $\tau_{\varepsilon^{-1}} T \tau_\varepsilon = T$. Falls es sich bei T außerdem um einen Faltungsoperator über $\mathbb{R}^n$ mit Kern $K(x)$ handelt, sieht man durch eine einfache Rechnung, dass $K(\varepsilon x) = \varepsilon^{-n} K(x)$ gelten muss; K ist also homogen von Grad n.

Man kann also $K(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$ schreiben, wobei $\Omega(\varepsilon x) = \Omega(x)$, Ω also homogen von Grad 0 ist. Soll ein solches K die Bedingungen von Theorem 2 erfüllen, muss offensichtlich wegen Bedingung (2.1) Ω auf S^{n-1} beschränkt und somit integrierbar sein. Außerdem muss wegen Bedingung (2.3) und der Homogenität von Ω gelten: $\displaystyle\int_{S^{n-1}} \Omega \, d\sigma = 0$

Schwieriger ist schon die Bedingung (2.2); in diesem Fall genügt es aber, wenn mit $\omega(\delta) := \sup\limits_{\substack{|x-x'|\le\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')|$ eine Dini-artige Stetigkeit der Form $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} \, d\delta < \infty$ vorliegt. Diese Bedingung wird zum Beispiel von differenzierbaren oder Lipschitzstetigen Funktionen erfüllt.

Theorem 3

Sei $1 < p < \infty$ *und* $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *singulär. Falls ein* $\Omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *existiert, so dass:*

(3.1) *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $|x| > 0 :$ $\quad K(x) = \dfrac{\Omega(x)}{|x|^n}$

(3.2) *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0 :$ $\quad \Omega(\varepsilon x) = \Omega(x)$

(3.3) $\displaystyle\int_{S^{n-1}} \Omega \, d\sigma = 0$

(3.4) *für* $\omega(\delta) := \sup\limits_{\substack{|x-x'|\le\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')|$ *gilt:* $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} \, d\delta < \infty$

Dann ist der Faltungsoperator $T_K = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_K^\varepsilon : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *beschränkt auf* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis von Theorem 3:

Das Theorem wird ausführlich bewiesen in *E. M. Stein: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Seiten 39 – 41. Die Grundidee ist, mit den obigen Voraussetzungen zu zeigen, dass K die Bedingungen von Theorem 2 erfüllt.

Bemerkung

Falls $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ kann man weiter zeigen:

Es existiert $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $m(\varepsilon x) = m(x)$ für alle $\varepsilon > 0$, so dass gilt:

$$(\widehat{Tf})(x) = m(x)\hat{f}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

Die Hilbert-Transformation

Die oben bewiesenen Resultate wollen wir nun auf eine spezielle Transformation anwenden, die Hilberttransformation.

Definition

Sei $1 < p < \infty$. Der Operator $\mathcal{H} : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ mit

$$(\mathcal{H}f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\, dy := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy$$

heisst *Hilbert-Transformation.*

Die Hilbert-Transformation ist offenbar ein Faltungsoperator:

$$\mathcal{H}f = K_{\mathcal{H}} * f \qquad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{R}) \qquad \text{mit dem Kern } K_{\mathcal{H}}(x) := \frac{1}{\pi x} = \frac{\text{signum}(x)}{\pi |x|}$$

Eigenschaften

Die Hilberttransformation ist ein Faltungsoperator, somit kommutiert sie mit Translationen und Dilatationen.

Bisher wurde stillschweigend angenommen, dass die Hilbert-Transformation existiert. Doch handelt es sich dabei um ein singuläres Integral, das nicht zwingend konvergieren muss, daher ist seine Existenz nicht *a priori* klar. Mit Theorem 3 kann für $1 < p < \infty$ die Existenz und die Beschränktheit in $L^p(\mathbb{R})$ für solche Funktionen recht einfach nachgewiesen werden. Es ist lediglich nötig, die Voraussetzungen an den Kern $K_{\mathcal{H}}$ nachzuprüfen.

Satz 1
Die Hilbert-Transformation $\mathcal{H}$ erfüllt die Bedingungen von Theorem 3 auf $L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < \infty$. Somit ist die Hilberttransformation wohldefiniert und beschränkt.

Beweis:
Mit $\Omega(x) := \dfrac{\text{signum}(x)}{\pi}$ sieht man, dass $K = K_{\mathcal{H}}$ die Bedingungen (3.1) bis (3.3) offensichtlich erfüllt. Dabei beachte man, dass $S^0 = \{-1\} \cup \{1\}$ ist.
Daraus folgt auch unmittelbar, dass K die Bedingung (3.4) erfüllt. Für die Berechnung des dortigen Integrals sind nämlich nur Werte $0 \leq \delta \leq 1$ von Bedeutung. Für solche δ ist aber $\omega(\delta) = 0$, weil mit $x, x' \in S^0$ und $|x - x'| \leq \delta \leq 1$ folgt, dass $x = x'$ und somit $|\Omega(x) - \Omega(x')| = 0$ ist.

Daraus folgt, dass

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta}\, d\delta = 0 < \infty$$

□

Bemerkung
Man kann die Wohldefiniertheit und Beschränktheit der Hilberttransformation auch mit Theorem 2 zeigen, wie es im Buch von E. M. Stein gemacht wird.

Es bleibt die Frage offen, wie es in den Fällen $L^1(\mathbb{R})$ und $L^\infty(\mathbb{R})$ ausschaut. Man kann zeigen, dass die Hilbert-Transformation auf $L^1(\mathbb{R})$ schwach beschränkt, vom Typ w-$(1,1)$, ist. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht weiter ausgeführt. Auf $L^\infty(\mathbb{R})$ hingegen ist die Hilbert-Transformation unbeschränkt, dies lässt sich an einem Beispiel leicht einsehen.

Satz 2
Die Hilbert-Transformation $\mathcal{H}$ ist unbeschränkt auf $L^\infty(\mathbb{R})$.

Beweis:
Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Offenbar ist $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, andererseits gilt für $x \in [1,2]$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\infty} \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to\infty} \log a - \frac{1}{\pi}\log(x) \\ &= \infty\end{aligned}$$

Es folgt: $\|\mathcal{H}f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |(\mathcal{H}f)(x)| \geq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[1,2]} |(\mathcal{H}f)(x)| = \infty$

□

Was funktioniert hier nicht? Die Singularität bei 0 stellt kein Problem dar, weil sie offensichtlich integrierbar ist. Stattdessen ist es der fehlende Abfall von $f(x)$ für $x \to \infty$. Dieser liegt aber für Funktionen in $L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < \infty$ vor, so dass die Singularitäten bei $\pm\infty$ mittels der Faltung kontrollierbar sind. Dies ist aber gerade für $p = \infty$ nicht gegeben.