Maximalfunktion

Seminar "Grundideen der Harmonischen Analysis"
bei Prof. Dr. Michael Struwe
HS 2007

Vortrag von Zahner Pascal

In dieser Arbeit wird hauptsächlich die Maximalfunktion und Abschätzungen davon behandelt. Weiter ist der Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue und dessen Verallgemeinerung auf reguläre Familien aufgeführt.

1 Maximalfunktion

Definition 1.1 ***(Maximalfunktion)*** *Für $f \in L^1_{loc}$ ist die Maximalfunktion $M(f)$ definiert als*

$$M(f)(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

wobei μ das Lebesguemass ist.

Definition 1.2 ***(Verteilungsfunktion von $|g|$)*** *Sei g auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Dann ist die Verteilungsfunktion von $|g|$ definiert durch*

$$\lambda(\alpha) := \mu(\{x : |g(x)| > \alpha\}).$$

Zur Repetition sind nun ein paar Bemerkungen und Sätze, welche aus Mass und Integral bekannt sind, aufgeführt.

Bemerkung 1.3 *Für $g \in L^p$ gilt*

i) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p\, dy = p \int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) d\alpha,$

ii) $\|g\|_\infty = inf\{\alpha : \lambda(\alpha) = 0\}.$

Satz 1.4 ***(Vitali-Überdeckungssatz, ohne Beweis)*** *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Kugeln $B = B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ mit Durchmessern $diam(B) = 2r < d_0$. Zu jeder Kugel $B = B_r(x)$ sei $\hat{B} = B_{5r}(x)$ die 5-fach vergrösserte Kugel. Dann gibt es eine abzählbare Familie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ von paarweisen disjunkten Kugeln so dass*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}.$$

Mit Satz 1.4 erhalten wir insbesondere Korollar 1.5 mit der σ-Additivität.

Korollar 1.5 *Für $E \subset \mathbb{R}^n$ μ -messbar und durch eine Familie $\mathcal{F}$ wie in Satz 1.4 überdeckt existiert eine abzählbare Familie $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{F}$ von paarweisen disjunkten Bällen B_k , so dass*

$$\sum_k \mu(B_k) \geq C\mu(E),$$

wobei $C = C(n) > 0$ ($C = 5^{-n}$ genügt).

Wir benutzen nun Korollar 1.5 um folgenden Satz über Eigenschaften der Maximalfunktion zu beweisen.

Satz 1.6 *Sei f auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Dann gelten folgende Aussagen.*

1) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, dann ist M(f) fast überall endlich.

2) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\mu(\{x : M(f)(x) > \alpha\}) \leq \frac{B}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.$$

3) Ist $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, dann ist

i) $M(f) \in L^p(\mathbb{R})$,

ii) $\|M(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p$ mit $A_p = A(p, n)$.

Beweis: *Wir betrachten zunächst den Fall $p = 1$ und beweisen die zweite Aussage des Satzes. Sei dazu $E_\alpha := \{x : M(f)(x)\} > \alpha\}$. Wähle zu $x \in E_\alpha$ ein $r = r(x) > 0$ mit*

$$\int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy > \alpha\ \mu(B_r(x)). \qquad (*)$$

Dann gilt

$$\mu(B_r(x)) < \frac{1}{\alpha} \|f(y)\|_1$$

und weiter

$$E_\alpha \subset \bigcup_{x \in E_\alpha} B_r(x).$$

Wir können nun also Korollar 1.5 anwenden. Wähle Bälle B_k wie in Korollar 1.5, so dass gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \geq C \ \mu(E_\alpha). \qquad (**)$$

Nun folgt mit Korollar 1.5, $(*)$ und $(**)$ wegen der Disjunktheit der Bälle B_k

$$\mathsf{S} \int\limits_{B_r(x)} |f(y)| \, dy > \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \geq \alpha \ C \ \mu(E_\alpha).$$

Setze $B = \frac{1}{C}$ dann folgt die zweite Aussage des Satzes mit

$$\mu(E_\alpha) \leq \frac{B}{\alpha} \mathsf{S} \int\limits_{B_r(x)} |f(y)| \, dy \leq \frac{B}{\alpha} \|f(x)\|_1 = \frac{B}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx.$$

Für $\alpha \to \infty$ folgt die erste Aussage des Satzes für den Fall $p = 1$.
Für $p = \infty$ gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$ fast überall und somit

$$M(f)(x) \leq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} \|f(y)\|_\infty \, dy = \|f(y)\|_\infty \, .$$

Daraus folgt die erste und dritte Aussage des Satzes für $p = \infty$.
Es bleibt zu zeigen, dass die erste und dritte Aussage des Satzes für $1 < p < \infty$ gilt. Sei nun also $1 < p < \infty$. Definiere

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & \textit{falls } |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$$

und damit

$$M(f)(x) \leq M(f_1)(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

Daraus folgt

$$\{x : M(f)(x) > \alpha\} \subset \{x : M(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\}$$

und weiter mit der zweiten Aussage des Satzes

$$\begin{aligned} \mu(E_\alpha) &= \mu(\{x : M(f)(x) > \alpha\}) \leq \mu(\{x : M(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\}) \\ &\leq \frac{2B}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)| \, dx = \frac{2B}{\alpha} \int\limits_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)| \, dx. \qquad (***) \end{aligned}$$

Setze nun $g(x) := M(f)(x)$ und $\lambda_g(x) := \mu(\{x : |g(x)| > \alpha\})$. Dann folgt mit Bemerkung 1.3

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (M(f)(x))^p dx = p \int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_g(\alpha) d\alpha.$$

Somit folgt mit Fubini

$$\begin{aligned}
\|M(f)\|_p^p &= p \int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} \mu(E_\alpha) d\alpha \overset{(***)}{\leq} p \int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} (\frac{2B}{\alpha} \int\limits_{|f| > \frac{\alpha}{2}} |f(x)| \, dx) d\alpha \\
&= 2p \ B \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, (\int\limits_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha) dx \\
&= 2p \ B \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \frac{1}{p-1} (2 \, |f(x)|)^{p-1} dx \\
&= \frac{2^p \ p \ B}{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die erste und dritte Aussage des Satzes mit

$$\|M(f)\|_p \leq A_p \, \|f\|_p$$

wobei $A_p = (\frac{2^p \ p \ B}{p-1})^{\frac{1}{p}}$. Somit ist der Satz vollständig bewiesen. $\square$

2 Lebesguesches Differenzierbarkeitstheorem

Nun wollen wir den im ersten Teil erarbeiteten Satz 1.6 verwenden, um das Lebesguesche Differenzierbarkeitstheorem zu beweisen.

Satz 2.1 *Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$*

1)

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} f(y)dy,$$

2)

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)| \, dy \overset{(r \to 0)}{\to} 0.$$

Bemerkung 2.2 *Die erste Aussage von Satz 2.1 wird als Lebesguesches Differenzierbarkeitstheorem bezeichnet.*

Beweis: *Wir zeigen zuerst, dass die zweite Aussage die erste Aussage des Satzes impliziert. Sei x so, dass die zweite Aussage des Satzes erfüllt ist. Betrachte die Abschätzung*

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} f(y)dy \right| &= \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \Big(\int\limits_{B_r(x)} f(x)dy - \int\limits_{B_r(x)} f(y)dy \Big) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} (f(x) - f(y))dy \right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)| \, dy \overset{(r \to 0)}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Nun bleibt also noch die zweite Aussage zu beweisen. Wir betrachten zuerst den Fall $f \in C^0_0$ (stetige Funktionen mit kompaktem Support). Danach verwenden wir, dass C^0_0 in L^1 dicht liegt.

Sei also $f \in C_0^0$. Dann gilt

$$\frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \overset{(r\to 0)}{\to} 0, \qquad (*)$$

da f gleichmässig stetig ist.
Sei nun o.B.d.A. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. (Betrachte sonst zu vorgegebenem $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| < n-1$ die Funktion $h := f\chi_{B_n(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.) Dann existiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f_k \overset{r\to\infty}{\to} f \qquad \textit{in } L^1(\mathbb{R}^n), \qquad (**)$$

da $C_0^0 \subset L^1$ dicht liegt.
Definiere $\fint\limits_{B_r(x)} f(x)dx := \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} f(x)dx$ und betrachte

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{r\to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \\
&= \overline{\lim_{r\to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(y) + f_k(y) - f(y)|\, dy \\
&\leq |f(x) - f_k(x)| + \underbrace{\overline{\lim_{r\to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} |f_k(x) - f_k(y)|\, dy}_{\overset{(*)}{=}0} + \overline{\lim_{r\to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} |f_k(y) - f(y)|\, dy \\
&\leq M(f - f_k)(x) + |f(x) - f_k(x)|\,. \qquad (***)
\end{aligned}$$

Da die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\mu \quad (\{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy > 0\}) \\
&= \quad \lim_{\epsilon\to 0} \mu(\{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy > 2\,\epsilon\})
\end{aligned}$$

gilt, zeigen wir nun

$$\forall \epsilon > 0 : \mu(\{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy > 2\,\epsilon\}) = 0.$$

Dann folgt insbesondere auch $\mu(\{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \fint_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy > 0\}) = 0$.

Sei nun $\epsilon > 0$ *fest. Dann gilt*

$$\mu(\{x : \overline{\lim_{r\to 0}} \fint_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy > 2\,\epsilon\})$$

$$\overset{(***)}{\leq} \underbrace{\mu(\{x : M(f - f_k)(x) > \epsilon\})}_{\overset{Satz 1.6}{\leq} \underbrace{\frac{B}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f_k(y)|\, dy}_{\overset{(**)}{\to} 0 \ (k\to\infty)}} + \underbrace{\mu(\{x : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\})}_{\overset{Chebyshev}{\leq} \frac{1}{\epsilon} \underbrace{\|f(x) - f_k(x)\|_1}_{\overset{(**)}{\to} 0 \ (k\to\infty)}} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Dies beweist den Satz. □

Definition 2.3 ***(Lebesgue Punkt)*** *Ein* $x \in \mathbb{R}^n$ *heisst Lebesgue-Punkt von f, falls*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy = 0.$$

Definition 2.4 ***(reguläre Familie)*** *Eine Familie* $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *messbarer Mengen des* $\mathbb{R}^n$ *heisst regulär, falls*

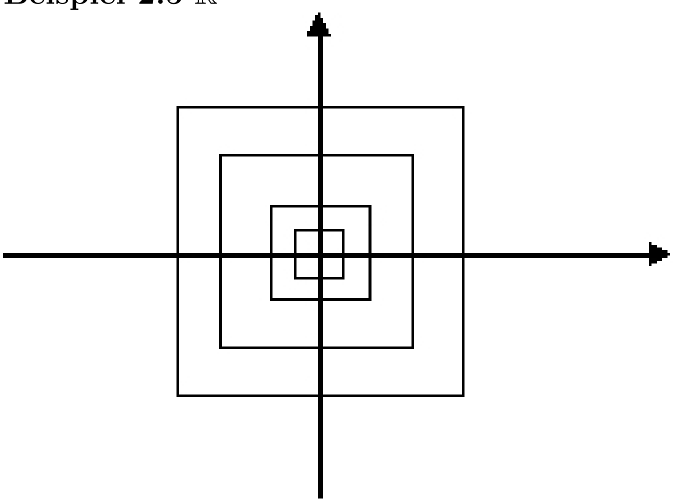
i) $\inf_{S\subset\mathcal{F}} \mu(S) = 0$

und

ii) $\exists d > 0 : \forall S \subset \mathcal{F}\ \exists B_r(0)$ *offen mit* $S \subset B_r(0)$ *und* $\mu(S) \geq d\ \mu(B_r(0))$

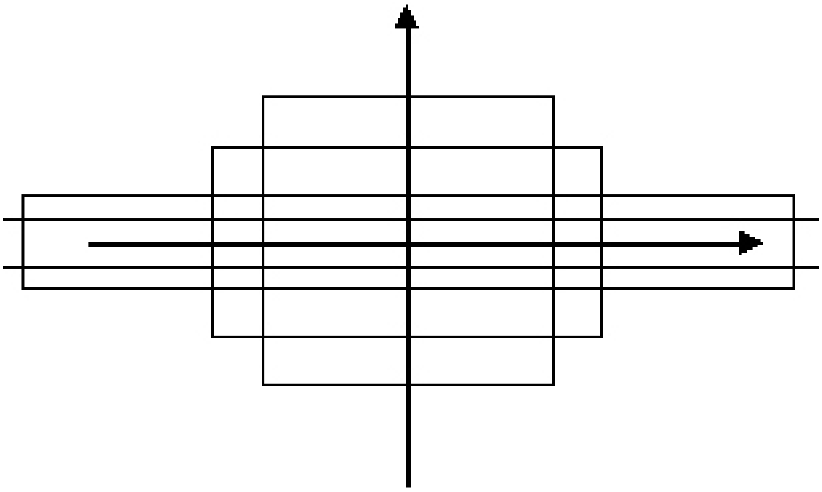
gelten.

Beispiel 2.5 $\mathbb{R}^n$



Konzentrische Quadrate um Null bilden eine reguläre Familie.

Beispiel 2.6 $\mathbb{R}^n$



Konzentrische Rechtecke um Null bilden keine reguläre Familie.

Nun wollen wir den Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue auf reguläre Familien verallgemeinern.

Satz 2.7 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle Lebesgue-Punkte x und alle regulären Familien $\mathcal{F}$*

1)

$$f(x) = \lim_{\substack{S \in \mathcal{F} \\ \mu(S) \to 0}} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f(x-y)dy,$$

2)

$$\lim_{\substack{S \in \mathcal{F} \\ \mu(S) \to 0}} \frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(x-y) - f(x)|\, dy = 0.$$

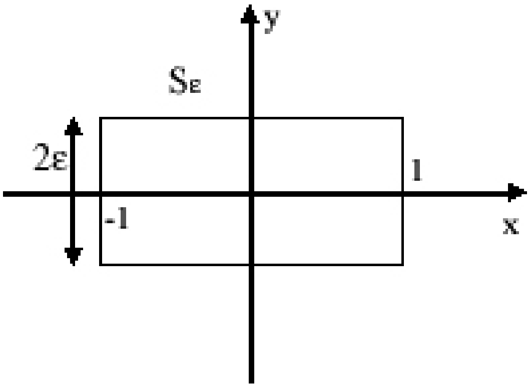
Beweis: *Dass die zweite Aussage des Satzes die erste Aussage des Satzes impliziert beweist man analog wie man dies im obigen Satz 2.1 gemacht hat. Für den Beweis der zweiten Aussage des Satzes betrachte man*

$$\frac{1}{\mu(S)} \int_S |f(x-y) - f(x)|\, dy \overset{\mathcal{F} \ regular}{\leq} \underbrace{\fint_{B_r(x)} |f(x-y) - f(x)|\, dy}_{\overset{Satz 2.1}{\to} 0 \ (r \to 0)}.$$

$\square$

Wie das folgende Beispiel zeigt, ist die Regularitätsbedingung in Satz 2.7 notwendig.

Beispiel 2.8 *Sei* $f(x, y) = x^2$.



Die Konzentrischen Rechtecke S_ϵ *mit Seitenlänge 2 und Höhe* 2ϵ *bilden keine reguläre Familie. Da f stetig ist, sind alle Punkte Lebesgue-Punkte. Also insbesondere ist der Punkt (0,0) ein Lebesgue-Punkt. Aber es gilt*

$$\frac{1}{\mu(S_\epsilon)} \int\limits_{S_\epsilon} f(x, y) dx\ dy = \frac{1}{3} \nrightarrow 0 = f(0, 0)\ (\epsilon \to 0).$$