Proseminar:
„Grundideen der harmonischen Analysis“
im HS07 bei Prof. Struwe

Singuläre Integrale Teil II
– Erweiterungen des Hauptsatzes –

Christoph Kandetzki, Alain Weber

03.12.2007

Motivation

Das letzte Mal haben wir einen Großteil der bisher im Seminar behandelten Techniken eingesetzt, um den Grundstein zur Theorie einer neuen Klasse von stetigen Operatoren $\mathbb{L}^p \to \mathbb{L}^p$, den sogenannten „singulären Integralen“ zu legen. Erwähnenswerte Zutaten waren etwa die Calderón-Zygmund-Zerlegung, der Interpolationssatz von Marcinkiewicz, sowie die $\mathbb{L}^2$–Theorie der Fouriertransformation. Als singuläre Integrale haben wir die Faltung eines „singulären Kerns K(x)“ mit einer $\mathbb{L}^p$-Funktion f verstanden.[1] Unsere Voraussetzungen erlaubten uns, den so definierten (stetigen) Operator auf einer dichten Teilmenge des $\mathbb{L}^p$, nämlich $\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^p$, explizit darzustellen. Eine (abstrakte) Definition auf dem ganzen $\mathbb{L}^p$ erhielten wir sodann durch Fortsetzung. Hier ist zur Erinnerung noch einmal das Theorem.

Theorem 1. *Sei $K \in \mathbb{L}^2$, und es gelten die zwei Annahmen:*
(a) Die Fourier Transformierte von K sei fast überall beschränkt:

$$|\hat{K}(x)| \leq B \tag{1}$$

(b) K sei von der Klasse C^1 ausserhalb des Ursprungs und

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{B}{|x|^{n+1}}. \tag{2}$$

Für $f \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^p$ setze

$$(Tf)(x) = \int\limits_{R^n} K(x-y)f(y)dy. \tag{3}$$

Dann existiert eine Konstante A_p, so dass

$$\|T(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p, \ \ 1 < p < \infty. \tag{4}$$

Rekapitulieren wir kurz den Verlauf des Beweises, um unser weiteres Vorgehen zu motivieren: Wir konnten mit den gemachten Voraussetzungen (d.h. K $\in \mathbb{L}^2$ und (1)) den (Faltungs-)Operator T problemlos auf $\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$ (dicht in $\mathbb{L}^2$!) definieren[2] und abschätzen. Die starke (2,2) Abschätzung haben wir uns damit quasi a priori gegeben. Sodann zeigten wir (mit Methoden der rellen Analysis), dass T zudem schwach-(1,1) ist und konnten den Interpolatonssatz für 1<p<2 anwenden. Der allgemeine Fall folgte aus einem Dualitätsargument.

In einem ersten Schritt wollen wir nun die Voraussetzungen von Theorem 1 leicht abschwächen. Wir modifizieren gleichzeitig den Beweis des Theorems und zeigen damit,

[1]Beachte, dass wir im Theorem keine direkte Bedingung an $K(x)$ im Ursprung gestellt haben. D.h. wir lassen zu, dass der Kern sich im Ursprung besonders verhalten darf („Singularität“)

[2]Bemerke, dass wir im Beweis also zweimal Gebrauch davon machen, dass $\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^p$ dicht in $\mathbb{L}^p$ liegt. Einmal bei der (2,2) Abschätzung und später beim Dualitätsargument.

dass man die schwache (1,1) Abschätzung auch auf eine andere Weise erhalten kann, als dies vor einer Woche demonstriert wurde.

In einem zweiten Schritt werden wir dann eine wesentliche Modifikation am Hauptsatz vornehmen und ihn für Zwecke der Anwendung anpassen. Denn betrachten wir als unser bisher einziges Beispiel eines singulären Integraloperators die Hilberttransformation

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}\, dy, \tag{5}$$

so verfehlt ihr Kern offenbar die Bedingung $K \in \mathbb{L}^2$ und Theorem 1 ist nicht anwendbar. Die zweite Variante des Hauptsatzes umgeht diese Hürde, indem sie den Integraloperator als $\mathbb{L}^p$-Limes $\epsilon \to 0$ einer Folge von Operatoren T_ϵ definiert, auf die wir das obige Theorem anwenden können. Auf diese Weise erhalten wir erneut einen stetigen Operator $\mathbb{L}^p \to \mathbb{L}^p$, allerdings dieses Mal ohne explizite Darstellung.

Eine kleine Verbesserung des Hauptsatzes

Im Beweis von Theorem 1 verwendeten wir die Bedingung an den Kern

$$|\nabla K(x)| \leq B\,|x|^{-(n+1)}\,, \tag{6}$$

die wir nun durch folgende ersetzen[3]

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\; dx \leq B' \qquad \text{fuer alle } y \neq 0. \tag{7}$$

Gehen wir nun zur angekündigten ersten Abschwächung der Voraussetzungen von Theorem 1 über, die das nachfolgenden Korollar zum Ausdruck bringt.

Korollar 1. *Theorem 1 bleibt gültig, wenn man die Bedingung (6) durch (7) ersetzt.*

Beweis. Die Bedingung, die wir verändert haben, spielt nur beim Beweis der schwachen (1,1) Abschätzung des Operators T eine Rolle. Wir steigen also an dieser Stelle ein und notieren im Wesentlichen die notwendigen Abänderungen. Für gegebenes $\alpha > 0$ ist zu zeigen, dass:

$$m\{x : |Tf|\,(x) > \alpha\} \leq \frac{const}{\alpha}\|f\|_1 \qquad f \in \mathbb{L}^1. \tag{8}$$

[3] Dass (7) eine Konsequenz von (6) ist, folgt leicht mit dem Mittelwertsatz (benutze Polarkoordinaten).

Zur Erinnerung: Man führt eine Calderón-Zygmund Zerlegung $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$ zum Niveau α durch. Auf der Menge F verhält sich f harmlos. Über die Menge Ω sind strukurelle Eigenschaften bekannt, vor allem ist sie darstellbar als $\Omega = \bigcup_{j\geq 1} Q_j$ mit disjunkten Würfeln Q_j, und das Maß erfüllt die wichtige Abschätzung

$$m(\Omega) \leq \frac{const}{\alpha} \|f\|_1. \tag{9}$$

Zum Beweis der Behauptung zerlegte man (und wir wollen es hier zunächst genauso tun) die $\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^p$–Funktion f(x) in einen „guten" und einen „schlechten" Anteil: $f = g + b$. Die genaue Definition lautet:

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } x \in F \\ \frac{1}{m(Q_j)} \int\limits_{Q_j} f(x)dx & , \text{ für } x \in Q_j^\circ \end{cases} \tag{10}$$

Wegen der Linearität von T können mit Blick auf (8) die Verteilungsfunktionen von Tg und Tb getrennt abgeschätzt werden, wobei der Fall Tg leicht abzuhandeln ist. Wir präsentieren nun einen neuen Weg für die Abschätzung von Tb und unterteilen dazu erneut:

$$m\{x : |Tb|(x) > \frac{\alpha}{2}\} = m\{x \in F : |Tb|(x) > \frac{\alpha}{2}\} + m\{x \in \Omega : (Tb)(x) > \frac{\alpha}{2}\} \tag{11}$$

Schwierigkeiten bereitet wegen (9) nur der linke Teil. Im Beweis des vergangenen Vortrags wurde zur Abschätzung dieses Terms benutzt, dass in der Calderón-Zygmund-Zerlegung angenommen werden darf, dass der Durchemesser eines Würfels proportional zu seinem Abstand von der Menge F ist.

Unsere Strategie sieht nun so aus: Wir vergrößern die Menge Ω und erhalten so die disjunkten Mengen $\Omega^* \supset \Omega$ und $F^* \subset F$, wobei wieder $\mathbb{R}^n = F^* \cup \Omega^*$ ist. Ersetzen wir in (11) Q durch Q^* und F durch F^*, können wir zum einen auf der (verkleinerten) Menge F^* eine Abschätzung beweisen. Zum anderen ist das Maß für Q^* immer noch klein genug (vgl. (12)).

Sei also Q_j^* der um den Faktor $2(n)^{-\frac{1}{2}}$ gestreckte Würfel mit selbem Mittelpunkt und $\Omega^* = \bigcup_{j\geq 1} Q_j^*$. Dann gilt natürlich ($y^{(j)}$: Mittelpunkt des Würfels Q_j) :

$$m(\Omega^*) \leq (2n^{\frac{1}{2}})^n m(\Omega) \tag{12}$$

$$x \notin Q_j^* \Rightarrow \left|x - y^{(j)}\right| \geq 2\left|y - y^{(j)}\right| \qquad \text{fuer alle } y \in Q_j \tag{13}$$

Wir wissen, dass $\int_{Q_k} b_k = 0$, und somit gilt auch

$$Tb_k(x) = \int_{Q_k} \left[K(x-y) - K(x - y^{(k)})\right] b_k(y)\, dy, \tag{14}$$

und wir können mit unserer Abschätzung beginnen ($b_k = b\chi_{Q_k}$). Beim Übergang zur dritten Zeile benutzen wir den Satz von Fubini, dessen Anwendbarkeit durch die Existenz des zweiten iterierten Integrals gesichert ist (man vergleiche dazu den Gang der folgenden Abschätzungen).

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{F}^*} |Tb(x)|\,dx &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathrm{F}^*} |Tb_k(x)|\,dx\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathrm{F}^*} \int_{Q_k} \left|K(x-y) - K(x-y^{(k)})\right| |b(y)|\,dy\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathrm{Q_k}} |b(y)| \int_{F^*} \left|K(x-y) - K(x-y^{(k)})\right|\,dx\,dy\end{aligned}$$

Nun wollen wir unsere Voraussetzung (7) ins Spiel bringen. Wir erreichen dies durch die Substitution $\tilde{x} = x - y^{(k)}$, $\tilde{y} = y - y^{(k)}$ und erhalten unter Beachtung von (vgl. (13)) ${\mathrm{Q_k}}^* \subset \{x : \left|x - y^{(j)}\right| \geq 2\left|y - y^{(j)}\right|\}$ für $y \in \mathrm{Q_k}$ sodann, dass

$$\int_{(Q_k^*)^C} \left|K(x-y) - K(x-y^{(k)})\right|\,dx \leq \int_{|\tilde{\mathrm{x}}| \geq 2|\tilde{\mathrm{y}}|} |K(\tilde{x}-\tilde{y}) - K(\tilde{x})|\,d\tilde{x} \leq B'.$$

Beachte nun, dass $(Q_k^*)^C \supset F^*$ gilt, und verwende (7), $|b| \leq |f| + |g|$ sowie die Definition von g.

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{F}^*} |Tb(x)|\,dx &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathrm{Q_k}} |b(y)| \int_{(Q_k^*)^C} \left|K(x-y) - K(x-y^{(k)})\right|\,dx\,dy\\ &\leq B' \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathrm{Q_k}} |b(y)|\,dy\\ &\leq B' \left(\int_{\Omega} |f(y)|\,dy + \int_{\Omega} |g(y)|\,dy\right)\\ &\leq 2B'\,\|f\|_1.\end{aligned}$$

Mit Tchebychev und (12) ergibt sich nun analog zu (11) die gewünschte w-(1,1) Abschätzung:

$$\begin{aligned}m\{x : |Tb|\,(x) > \frac{\alpha}{2}\} &= m\{x \in F^* : |Tb|\,(x) > \frac{\alpha}{2}\} + m\{x \in \Omega^* : (Tb)(x) > \frac{\alpha}{2}\}\\ &\leq \frac{const}{\alpha}\|f\|_1 + \frac{4B'}{\alpha}\|f\|_1\\ &\leq \frac{const}{\alpha}\|f\|_1\end{aligned}$$

Der Rest ist Wiederholung des ersten Beweises, und wir sind fertig!

$\square$

Eine neue Variante des Hauptsatzes

Wie angekündigt, formulieren wir nun eine neue Variante des Hauptsatzes, die sich qualitativ von der bisher vorgestellten unterscheidet. Insbesondere sehen wir davon ab, $\mathrm{K} \in \mathbb{L}^2$ zu fordern und erreichen somit eine allgemeinere Anwendbarkeit des Resultats. Der Preis hierfür ist, dass wir den Operator nun über einen Grenzprozess definieren müssen. Durch diese Vorgehensweise können wir vom Phänomen der Auslöschung um die Singularität profitieren,[4] was am Beispiel der Hilbertransformation bereits im vorangegangenen Vortrag heuristisch motiviert wurde. Kommen wir zum Hauptresultat unseres Themas.

Theorem 2. *Der Kern K erfülle:*

$$|K(x)| \leq B\,|x|^{-n} \tag{15}$$

$$\int_{|\mathrm{x}|\geq 2|\mathrm{y}|} |K(x-y) - K(x)|\; dx \leq B \qquad \text{fuer alle } y \neq 0 \tag{16}$$

$$\int_{\mathrm{R}_1<|\mathrm{x}|<\mathrm{R}_2} K(x)\, dx = 0 \qquad \text{fuer alle } 0 < R_1 < R_2 < \infty \tag{17}$$

Wir setzen für $f \in \mathbb{L}^{\mathrm{p}}$, $1 < p < \infty$ und $\epsilon \geq 0$:

$$T_\epsilon(f)(x) := \int_{|\mathrm{y}|\geq\epsilon} f(x-y)K(y)\, dy.$$

Dann gilt mit einer Konstanten A_p, die nicht von ϵ und f abhängt:

$$\|T_\epsilon(f)\|_p \leq A_p\,\|f\|_p \tag{18}$$

Zu $f \in \mathbb{L}^{\mathrm{p}}$ existiert der Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(f)$ in der $\mathbb{L}^{\mathrm{p}}$–Norm, und wir setzen

$$T(f) := \lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(f)\,.$$

Dann ist $T : \mathbb{L}^{\mathrm{p}} \to \mathbb{L}^{\mathrm{p}}$ stetig mit derselben Abschätzung (18).

Bemerkung 1. *Eine entscheidende Voraussetzung dafür, dass dieses Theorem so formuliert werden kann, ist die Unabhängigkeit der Konstante A_p in Ungleichung (4) in Theorem 1 von der $\mathbb{L}^2$–Norm von K (vgl. Beweis von Theorem 2). Im Lichte dieser Bemerkung wird deutlich, dass die Einschränkung $\mathrm{K} \in \mathbb{L}^2$ in Theorem 1 keine Konsequenzen für die weitere Entwicklung hat, sondern nur von vorübergehender Natur ist und durch einen Grenzprozess beseitig werden kann.*

Bevor wir das Theorem beweisen. treffen wir die nötigen Vorbereitungen!

[4] vgl. Theorem 2, Gl. (17)

Lemma 1. *K sei wie in Theorem 2 mit Schranke B. Sei*

$$K_\epsilon(x) := K(x)\,\chi_{\{|x|\geq\epsilon\}}\,.$$

Dann ist (offenbar) $K_\epsilon \in \mathbb{L}^2$, und die Fouriertransformation $\widehat{K_\epsilon}$ ist beschränkt:

$$\sup_y \left|\widehat{K_\epsilon}(y)\right| \leq CB\,, \qquad \epsilon > 0 \tag{19}$$

Die Konstante C hängt einzig von der Dimension des Raumes n ab.

Ein Trick wird uns beim Beweis helfen. Wir können ohne allzu große Mühen das Lemma für den Spezialfall $\epsilon = 1$ beweisen. Den allgemeinen Fall $\epsilon > 0$ erhalten wir dann durch geschicktes Transformieren. Das nächste Lemma ebnet uns hierfür den Weg.

Lemma 2 (Dilatationslemma)**.** *Sei $\epsilon > 0$, K wie in Theorem 2 (d.h. K erfülle die Bedingungen (15), (16) und (17) mit einer Konstanten B) und $K_\epsilon(x) := K(x)\,\chi_{\{|x|\geq\epsilon\}}$. Dann gilt:*

(i) $\epsilon^{-n}\,K(\epsilon^{-1}x)$ *erfüllt die Bedingungen mit derselben Schranke B.*

(ii) $K_1(x)$ *erfüllt die Bedingungen mit einer Schranke CB*

(iii) $K_\epsilon(x)$ *erfüllt die Bedingungen mit einer Schranke CB*

Die Konstante C hängt nur von der Dimension ab.

Bemerkung 2. *Insbesondere besagt Aussage (i) des Lemmas, dass die Bedingungen in Theorem 2 invariant unter dem Übergang von K zu $\epsilon^{-n}\,K(\epsilon^{-1}x)$ sind. Dies entspricht der Transformation des Kerns, wenn man vom Faltungsoperator T zu $\delta_\epsilon^{-1}T\delta\epsilon$ übergeht (δ_ϵ: Dilatation um $\epsilon > 0$).*

Beweisskizze des Dilatationslemmas.
Aussage (i): (15) und (17) durch scharfes Hinsehen, (16) durch Substitution.
Aussage (ii): (15) und (17) sind klar. Für (16) ergibt eine Fallunterscheidung die Behauptung, wobei $C := \max(1; \int_{1\leq|\mathrm{x}|\leq 2} |x|^{-n}\,dx; \int_{\frac{1}{2}\leq|\mathrm{x}|\leq 1} |x|^{-n}\,dx)$ gewählt werden kann.
Aussage (iii): Für $\epsilon = 1$ ist dies gerade Behauptung (ii). Mit einer Transformation führen wir den allgemeinen Fall hierauf zurück: Sei dazu $\tilde{K}(x) := \epsilon^n K(\epsilon x)$. Wegen (i) erfüllt $\tilde{K}$ die Gleichungen. Daher ist (ii) auf $\tilde{K}_1$ anwendbar. Nun schreiben wir: $K_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\tilde{K}_1(\epsilon^{-1}x)$. Dann folgt die Behauptung sofort aus (i). □

Bemerkung 3. *Es genügt, das Lemma für den Fall $\epsilon = 1$ zu beweisen.*

Begründung. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir stellen K_ϵ genau wie im Beweis von Aussage (iii) des vorangegangenen Lemmas dar, nämlich $K_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\tilde{K}_1(\epsilon^{-1}x)$. Mit der Dilatationsformel der Fouriertransformation[5] ergibt sich: $\widehat{K_\epsilon(y)}(x) = \left[\widehat{\epsilon^{-n}\tilde{K}_1(\epsilon^{-1}y)}\right](x) = \widehat{\tilde{K}_1}(\epsilon x) \leq CB$, wenn wir das Lemma für den Fall $\epsilon = 1$ beweisen. □

Beweis des Lemmas. Wir sahen in Lemma 2 (ii), dass K_1 die Bedingungen aus Theorem 2 erfüllt, wenn wir die Schranke B durch CB ersetzen (wobei C nur von der Dimension abhängt). Wir berechnen[6]

$$\begin{aligned}
\widehat{K_1}(-y) &= \lim_{R\to\infty}\int_{|\mathrm{x}|\leq \mathrm{R}} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)\,dx \\
&= \int_{|\mathrm{x}|\leq\frac{1}{|\mathrm{y}|}} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\frac{1}{|\mathrm{y}|}\leq|\mathrm{x}|\leq \mathrm{R}} e^{2\pi i x\cdot y}K_1(x)\,dx \\
&=: I_1 + I_2\,.
\end{aligned}$$

Zur Abschätzung von I_1 benutzen wir im ersten Schritt die Auslöschungseigenschaft (17), um eine -1 zu ergänzen.

$$I_1 = \int_{|\mathrm{x}|\leq\frac{1}{|\mathrm{y}|}} \left[e^{2\pi i x\cdot y} - 1\right] K_1(x)\,dx$$

Nun liefert der Mittelwertsatz mit anschließender Integration in Polarkoordinaten die gewünschte Abschätzung.

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \mathit{const}\,|y|\int_{|\mathrm{x}|\leq\frac{1}{|\mathrm{y}|}} |x|\,|K_1(x)|\,dx \\
&\leq \mathit{const}\cdot B\,|y|\int_{\mathrm{r}\leq\frac{1}{|\mathrm{y}|}} r\,r^{-n}\,r^{n-1}\,dr \\
&\leq \mathit{const}\cdot B
\end{aligned}$$

Für die Abschätzung des zweiten Teils wählen wir $z := \frac{1}{2}\frac{y}{|y|^2}$, d.h. $|z| = \frac{1}{2\,|y|}$. Dann gilt $e^{2\pi i\cdot yz} = -1$, und wir spalten I_2 so auf, dass Gleichung (16) angewandt werden kann. Offenbar gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{|\mathrm{y}|}\leq|\mathrm{x}|\leq \mathrm{R}} \left[K_1(x) - K_1(x-z)\right] e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&= \int_{\frac{1}{|\mathrm{y}|}\leq|\mathrm{x}|\leq \mathrm{R}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx + \int_{\frac{1}{|\mathrm{y}|}\leq|\mathrm{x+z}|\leq \mathrm{R}} K_1(x)e^{2\pi i x\cdot y}\,dx
\end{aligned}$$

[5] $(\widehat{\alpha^n\delta_\alpha f})(x) = \widehat{f}(\alpha^{-1}x)$

[6] In *Singular Integrals and differentiability properties of functions* von E.M. Stein wird die Fouriertransformation ohne ein Minus im Exponenten definiert, und wir folgen dieser Definition.

Das führt uns mit einer Nullergänzung und der Notation $B(x) := \{x : \frac{1}{|y|} \leq |x| \leq R\}$ auf folgende Darstellung für I_2:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{R\to\infty} \int_{B(x)} e^{2\pi i x\cdot y} K_1(x)\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{B(x)} e^{2\pi i x\cdot y} K_1(x)\, dx \\
&\quad + \lim_{R\to\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{|y|}\leq|x|\leq R} K_1(x-z) e^{2\pi i x\cdot y}\, dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{|\mathrm{y}|}\leq|\tilde{\mathrm{x}}+\mathrm{z}|\leq \mathrm{R}} K_1(\tilde{x}) e^{2\pi i \tilde{x}\cdot y}\, d\tilde{x} \right\} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{|y|}\leq|x|\leq R} \left[K_1(x) - K_1(x-z)\right] e^{2\pi i x\cdot y}\, dx \\
&\quad + \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{|y|}\leq|x|\leq R} K_1(x) e^{2\pi i x\cdot y}\, dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{|\mathrm{y}|}\leq|\tilde{\mathrm{x}}+\mathrm{z}|\leq \mathrm{R}} K_1(\tilde{x}) e^{2\pi i \tilde{x}\cdot y}\, d\tilde{x} \right\} \\
&=: I_{21} + I_{22} - I_{23}
\end{aligned}
$$

Für I_{21} verwenden wir das Analogon (vgl. Dilatationslemma, (ii)) von Ungleichung (16) für K_1 und $2\,|z| = \frac{1}{|y|}$.

$$
\begin{aligned}
|I_{21}| &\leq \frac{1}{2} \int_{|\mathrm{x}|\geq\frac{1}{|\mathrm{y}|}} |K_1(x-z) - K_1(x)|\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{|\mathrm{x}|\geq 2\,|\mathrm{z}|} |K_1(x-z) - K_1(x)|\, dx \\
&\leq C\, B
\end{aligned}
$$

Für den Rest, $I_{22} - I_{23}$, müssen wir die Mengen betrachten, auf denen sich die beiden Integrationsbereiche nicht überlappen. Dies sind die zwei Mengen
$A := \{x : |x| \leq \frac{1}{|y|} \leq |x+z| \leq R\}$ und $B := \{x : |x+z| \leq \frac{1}{|y|} \leq |x| \leq R\}$. Wir sehen jeweils mit der Dreiecksungleichung, dass $A \subset \{x : \frac{1}{2|y|} \leq |x| \leq \frac{1}{|y|}\} =: \tilde{A}$ bzw.
$B \subset \{x : \frac{1}{|y|} \leq |x| \leq \frac{3}{2|y|}\} =: \tilde{B}$ gilt. Wir können also $|I_{22} - I_{23}|$ abschätzen, indem wir über die Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ integrieren.

$$
|I_{22} - I_{23}| \leq \frac{1}{2} \int_{\tilde{A}} |K_1(x)|\, dx + \frac{1}{2} \int_{\tilde{B}} |K_1(x)|\, dx
$$

Beide Integrale auf der rechten Seite lassen sich in analoger Weise durch eine Integration in Polarkoordinaten unter Verwendung von (15) abschätzen. In der Tat erhalten wir am Beispiel des ersten Integrals

$$
\begin{aligned}
\int_{\tilde{A}} |K_1(x)|\, dx &\leq CB \int_{\frac{1}{2|\mathrm{y}|}\leq \mathrm{r} \leq \frac{1}{|\mathrm{y}|}} r^{-n}\, r^{n-1}\, dr \\
&\leq CB\, ln(2)\,.
\end{aligned}
$$

Insgesamt gilt also mit einer nur von der Dimension abhängenden Konstanten C, dass

$$\left|\widehat{K_1}(y)\right| \leq |I_1| + |I_2| \leq CB\,,$$

womit der Fall K_ϵ, $\epsilon = 1$, und damit auch das Lemma im Ganzen bewiesen wären.

□

Wir können nun ohne größere Probleme den Beweis von Theorem 2 in Angriff nehmen.

Beweis von Theorem 2. Wir nehmen an, dass K(x) die Vorraussetzungen des Theorems mit Schranke B erfüllt. Wegen Lemma 1 und Lemma 2 gibt es dann eine Schranke CB, so dass

$$\begin{aligned} |\widehat{K_\epsilon}(y)| &\leq CB & (20)\\ \int_{|x|\geq 2|y|} |K_\epsilon(x-y) - K_\epsilon(x)|\, dx &\leq CB, & (21) \end{aligned}$$

für alle $\epsilon > 0$. Mithilfe von Korollar 1 folgt, dass die Operatoren T_ϵ gleichmässig beschränkt sind. Das heisst

$$\sup_\epsilon \|T_\epsilon(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p, \qquad 1 < p < \infty \qquad \forall \epsilon > 0, f \in L^p \tag{22}$$

wobei A_p von p, CB und der Dimension n abhängt, aber nicht von ϵ und f.
Es bleibt zu zeigen, dass $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(f)$ in der L^p-Norm existiert. Dazu betrachten wir zuerst einen dichten Unterraum von L^p, nämlich die einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Sei also $f_1 \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\begin{aligned} T_\epsilon(f_1)(x) &= \int_{|y|\geq\epsilon} K(y) f_1(x-y)dy & (23)\\ &= \int_{|y|\geq 1} K(y) f_1(x-y)dy + \int_{1\geq|y|\geq\epsilon} K(y)[f_1(x-y) - f_1(x)]dy, & (24) \end{aligned}$$

wobei die Änderung am zweiten Term aufgrund der Auslöschungsbedingung (17) zulässig ist.
Da $|K(y)| \leq B|y|^{-n}$ für $|y| \geq 1$ liegt $K_1(y)$ in L^p. f_1 ist in L^1und das Faltungsprodukt der beiden somit in L^p. Damit ist der erste Term eine feste Funktion in L^p (unabhängig von ϵ).
Der Träger des zweiten Terms ist wegen $f_1 \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ kompakt. Daraus folgt wegen des

Mittelwertsatzes, dass $|f_1(x-y)-f_1(x)| \leq A|y|$. Wir bezeichnen den zweiten Term nun mit $T_\epsilon^2(f_1)(x)$. Für alle x gilt

$$\begin{aligned} |T_\epsilon^2(f_1)(x)| &\leq \int_{1\geq|y|\geq\epsilon} |K(y)[f_1(x-y)-f_1(x)]|dy && (25)\\ &\leq \int_0^1 \frac{B}{r} Ardr && (26)\\ &\leq BA. && (27) \end{aligned}$$

Deshalb hat $T_\epsilon^2(f_1)(x)$ eine punktweise konvergente Teilfolge, die wir mit $T^2(f_1)(x)$ bezeichnen. Dann gilt aber

$$|T_\epsilon^2(f_1)(x) - T^2(f_1)(x)| \leq BA\epsilon \tag{28}$$

für alle x, womit wir gezeigt hätten, dass der zweite Term von (23) gleichmässig konvergiert.
Die gleichmässige Konvergenz impliziert nun die gewünschte L^p-Konvergenz, womit die Aussage für $f_1 \in C_0^1(\mathcal{R}^n)$ gezeigt wäre.
Ein beliebiges $f \in L^p$ lässt sich in zwei Funktionen $f = f_1 + f_2$ zerlegen, wobei $f_1 \in C_0^1$ und $\|f_2\|_p$ beliebig klein ist. Für f_1 haben wir die L^p Konvergenz gezeigt und wegen der Stetigkeit der T_ϵ bleibt auch das Bild von f_2 beliebig klein. Daraus folgt, dass für $f \in L^p$, $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(f)$ in L^p konvergiert. □

Singuläre Integral-Operatoren, die mit Streckung kommutieren

Bisher haben wir die Klasse von Operatoren untersucht, die aus der Faltung mit einem Kern $K(y)$ bestehen. Man sieht leicht, dass diese mit Translationen kommutieren.
In diesem Paragraphen betrachten wir wir nun Operatoren dieser Form, die auch mit Streckung kommutieren. Das Ziel ist eine auf diese Untergruppe angepasste Version von Theorem 2 zu erhalten.
In einem ersten Schritt leiten wir Bedingungen für den Kern her. Kommutieren mit Streckung heisst in Formeln,

$$\tau_{\epsilon^{-1}} T \tau_\epsilon = T, \tag{29}$$

wobei

$$\tau_\epsilon f(x) := f(\epsilon x) \qquad \forall \epsilon > 0. \tag{30}$$

Mit dem Streckungsargument in Lemma 2 wurde bereits gezeigt, dass der zu $\tau_{\epsilon^{-1}} T \tau_\epsilon$ gehörige Kern $\epsilon^{-n} K(\epsilon^{-1}x)$ ist. Damit impliziert $\tau_{\epsilon^{-1}} T \tau_\epsilon = T$, dass

$$K(\epsilon x) = \epsilon^{-n} K(x) \qquad \forall \epsilon > 0. \tag{31}$$

$K(x)$ ist also homogen vom Grad $-n$. Daher können wir es in der Form

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \tag{32}$$

schreiben, wobei

$$\Omega(\epsilon x) = \Omega(x) \qquad \forall \epsilon > 0 \tag{33}$$

homogen vom Grad 0 ist. Anschaulich ist $\Omega(x)$ konstant auf Strahlen die vom Ursprung ausgehen und deshalb durch die Werte, die es auf der Einheitssphäre S^{n-1} annimmt komplett beschrieben.
Jetzt sind wir bereit um Theorem 2 umzuformulieren. Wegen (15) muss $\Omega(x)$ auf der Einheitssphäre beschränkt sein. Insbesondere ist es deshalb integrabel. Die Auslöschungsbedingung (17) ist damit äquivalent zu

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x) d\sigma = 0, \tag{34}$$

wobei $d\sigma$ das induzierte euklidsche Mass auf S^{n-1} bezeichnet. Die Glattheitsbedingung in (15) lässt sich nicht so einfach umformulieren. Wir fordern stattdessen, dass

$$\sup_{\substack{|x-x'|\le\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')| =: w(\delta), \qquad \int_0^1 \frac{w(\delta)d\delta}{\delta} < \infty \tag{35}$$

erfüllt. So eine Eigenschaft nennt man "Dini-Stetigkeitünd wir wollen nun zeigen, dass daraus (15) folgt.
Es gilt nun:

Theorem 3. *Sei $\Omega(x)$ homogen vom Grad 0 und erfülle (34) und (35) . Für $1 < p < \infty$, und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sei*

$$T_\epsilon(f)(x) = \int_{|y|\ge\epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy. \tag{36}$$

(a) Dann existiert eine Schranke A_p (unabhängig von f und ϵ), so dass

$$\|T_\epsilon(f)\|_p \le A_p \|f\|_p. \tag{37}$$

(b) $\lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon(f) = T(f)$ existiert in der L^p-Norm, und

$$\|T(f)\|_p \le A_p \|f\|_p. \tag{38}$$

Beweis. Wir zeigen, dass falls $\Omega(x)$ die Bedingungen des Theorem 3 erfüllt auch $\int_{|x|\ge 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \le B$ gilt. Ist das gezeigt, dann folgt Theorem 3 aus Theorem

2.
Wir beginnen mit der Zerlegung,

$$K(x-y)-K(x)=\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x-y|^n}+\Omega(x)\left[\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right]. \tag{39}$$

Der zweite Term erfüllt die gewünschte Abschätzung. Um dies zu sehen transformieren wir das Integral in Polarkoordinaten und benutzen den Mittelwertsatz.

$$\int_{|x|\geq 2|y|}\left|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right|dx \leq C'\int_{|y|}^{\infty}\frac{|y|}{r^2}dr \leq C \tag{40}$$

Für den ersten Term stellt man zuerst das folgende fest.
Falls $|x| \geq 2|y|$, ist die Distanz der Projektionen von $x-y$ und x auf die Einheitssphäre, $\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|$, durch $C\frac{|y|}{|x|}$ beschränkt (was man mit einem Ähnlichkeitsargument leicht sieht). Daher wird der erste Term in (39) dominiert durch,

$$C'\int_{|x|\geq 2|y|}\omega\left(C\frac{|y|}{|x|}\right)\frac{dx}{|x|^n}=C''\int_0^{c/2}\frac{\omega(\delta)}{\delta}d\delta<\infty \tag{41}$$

$\square$