ETH Zürich

(Pro)Seminar: Grundideen der Harmonischen Analysis

Singluläre Integrale - Teil 3

Sabrina Wiedersheim, Franziska Borer

18. Dezember 2007

1. Einleitung

Auch im dritten Teil über Singuläre Integrale geht es um Integraloperatoren vom Typ: $T_\varepsilon(f) = \int_{|y|\geq\varepsilon} K(y)f(x-y)dy$, mit $\varepsilon > 0$, $f \in L^p$, $1 < p < \infty$. Dabei ist uns aus den letzten beiden Ausarbeitungen bereits bekannt, dass der Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)$ unter bestimmten Bedingungen an K (siehe Teil 2) in der L^p-Norm existiert ($:= T(f)$) und, dass solche Typen von Integraloperatoren mit der Translation kommutieren.

In dieser Arbeit geht es um die am Schluss des letzten Vortrages erwähnte Untergruppe dieser Operatoren $T_\varepsilon(f)$, die zusätzlich mit der Streckung kommutieren. Das heisst wir werden also auch wieder $K(y) = \frac{\Omega(y)}{|y|^n}$ wählen, wobei $\Omega(y)$ die folgenden drei Bedingungen erfüllen soll:

- $\Omega(y)$ homogen vom Grad 0 sein soll (d.h. auf Strahlen aus dem Ursprung konstant, $\Omega(\varepsilon y) = \Omega(y),$ für alle $\varepsilon > 0$)
- Die Beschränktheits- und Auslöschungsbedingung gelten soll, d.h. $\int_{S^{n-1}} \Omega(x)d\sigma = 0$.
- Und die Glattheitsbedingung: $\sup_{\substack{|x-x'|\leq\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')| = \omega(\delta) \implies \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty$,

Dazu wurde auch bereits im letzten Vortrag gezeigt, dass der Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)$ in der L^p-Norm existiert und dass es eine obere Schranke A_p gibt (unabhängig von f und ε), so dass $\|T_\varepsilon(f)\|_p$ und $\|T(f)\|_p$ wie folgt abgeschätzt werden können: $\|T_\varepsilon(f)\|_p \leq A_p\|f\|_p$ und $\|T(f)\|_p \leq \|f\|_p$.

In diesem dritten Teil werden wir zeigen, dass es eine Multiplikatorfunktion $m(x) \in L^\infty$ gibt, so dass $\widehat{(Tf)}(x) = m(x)\hat{f}(x)$ für allen f und, dass dieses $m(x)$ explizit berechenbar ist. Die Expliziete Berechnung von dieser Multiplikatorfunktion wird der Hauptteil dieser Ausarbeitung sein. Als Abschluss werden wir dann noch zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon(f)$ nicht nur in der L^p-Norm existiert, sondern dass dieser für fast alle x existiert.

2. Existenz und Berechnung der Multipikatorfunktion

Kommen wir also zu dieser bereits in der Einleitung erwähnten Multiplikatorfunktion. In unserem ersten Satz haben wir noch einmal alle Voraussetztungen an den Operator T und die Eigenschaften der Multiplikatorfunktion $m(x)$ die wir anschliessend beweisen werden zusammengefasst:

Satz 1. *Sei Ω homogen vom Grad 0 und Ω erfülle:*

(A) $\int_{S^{n-1}} \Omega(x) d\sigma = 0$ *(Auslöschungs- und Beschränktheitsbedingung)*

(B) $\sup\limits_{\substack{|x-x'|\leq\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x) - \Omega(x')| = \omega(\delta) \implies \displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty$
(Glattheitsbedingung)

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sei $T_\varepsilon(f) = \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|n} f(x-y)dy$. Dann gilt für $T = \lim \varepsilon \to 0 T_\varepsilon$:

- $\widehat{(Tf)}(x) = m(x)\hat{f}(x)$, *wobei*
- $m(x) = \int_{S^{n-1}} [\frac{\pi i}{2} \operatorname{sign}(xy) + \log(\frac{1}{|xy|})]\Omega(y)d\sigma(y)$,
- *und $m(x) \in L^\infty$ homogen vom Grad 0.*

Beweis.

Existenz von $m(x)$:
Benutze folgende, bereits in der Schwartzraumtheorie bewiesene, Propositionen:

Proposition 1. *Sei $T : L^p \to L^q, 1 \leq p, q \leq \infty$, linear, beschränkt und T kommutiere mit Translationen. Dann gibt es eine eindeutige temperierte Distribution u, so dass $T(f) = u * f$, für alle $f \in \mathscr{S}$.*

Definition 1. *Eine Distribution u liegt genau dann in (L^2, L^2), wenn u eine temperierte Distribution ist und wenn es ein $A > 0$, s.d. $\|u*f\|_2 \leq A\|f\|_2$ für alle $f \in \mathscr{S}$.*

Proposition 2. *Eine Distribution u liegt genau dann in (L^2, L^2), wenn ein $m \in L^\infty$ existiert, so dass $\hat{u} = m$, dabei gilt speziell auch: $\widehat{(u * f)} = m\hat{f}$, für alle $f \in \mathscr{S}$.*

Da wir von unserem Operator $T : L^2 \to L^2$ bereits aus dem letzten Vortrag wissen, dass dieser mit Translationen kommutiert, sowie linear und beschränkt ist, können wir bereits die erste Proposition darauf anwenden. Diese beweist uns die Existenz einer temperierten Distribution u, so dass $T(f) = u * f$, für alle $f \in \mathscr{S}$. Und da u nach Definition in (L^2, L^2) liegt, folgt aus der zweiten Proposition die Existenz einer Funktion $m \in L^\infty$, so dass $\hat{u} = m$ und $\widehat{(u * f)} = m\hat{f} = \widehat{T(f)}$, für alle $f \in \mathscr{S}$. Da aber der Schwartzraum dicht in L^2 liegt, gilt diese Gleichheit auch für alle $f \in L^2$.

Explizite Berechnung von $m(x)$:
Betrachtet man die Definition von T_ε, so entspricht diese einer Faltung von f mit dem Kern $K = \frac{\Omega(y)}{|y|^n}$, wenn man diesem um den Ursprung einen Epsilonball herausschneidet. So können wir also T_ε wie folgt umschreiben:

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy = \lim_{\eta \to \infty} (K_{\varepsilon,\eta} * f)(x) \text{ mit}$$

$$K_{\varepsilon,\eta}(x) = \begin{cases} \frac{\Omega(x)}{|x|^n} & \text{für } \varepsilon \leq |x| \leq \eta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: $K_{\varepsilon,\eta}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denn $\Omega(x)$ ist nach den Voraussetzungen (A) und (B) beschränkt ($\Omega(x) \leq B$) und $\frac{1}{|x|^n}$ ist in dem beschränkten Gebiet $\varepsilon \leq |x| \leq \eta$ auch beschränkt, d.h., dass das Integral ist $< \infty$)

Weil nach Voraussetzung $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und im letzten Vortrag bewiesen wurde, dass $\|K_{\varepsilon,\eta} * f - T(f)\|_{L^2} \underset{\eta\to\infty}{\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}} 0$, gilt nach Plancherel: $\|\widehat{K_{\varepsilon,\eta} * f} - \widehat{T(f)}\|_{L^2} \underset{\eta\to\infty}{\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}} 0$, d.h. $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}\hat{f}(x) = \widehat{T(f)} = m(x)\hat{f}(x)$ und damit $m = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}$

zu berechnen bleibt also: $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x)$
Nach der Definition der Fouriertransformation gilt:

$$\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(-x) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x y} K_{\varepsilon,\eta}(y)dy$$

Und weil wir wissen, dass $\Omega(x)$ homogen vom Grad 0 ist, d.h. dass $\Omega(x)$ auf Strahlen aus dem Ursprung konstant ist, ist es von Vorteil ab nun x und y in Polarkoordinaten umzuschreiben: d.h. $x = Rx'$ und $y = ry'$, wobei $x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ und $y' = \frac{y}{|y|} \in S^{n-1}$. Die Jacobi-Determinante dieser Transformation ist, wie wir aus der Analysis wissen: r^{n-1}. Also:

$$\begin{aligned}
\widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(-x) &= \int_{S^{n-1}} \Big(\int_{\varepsilon}^{\eta} e^{2\pi i Rrx'y'} \frac{\Omega(ry')}{|ry'|^n} r^{n-1} dr \Big) d\sigma(y') \\
&= \int_{S^{n-1}} \Big(\int_{\varepsilon}^{\eta} e^{2\pi i Rrx'y'} \frac{\Omega(y')}{|y'|^n} \frac{dr}{r} \Big) d\sigma(y') \ , \ |y'| = 1 \\
&\overset{\text{Trick}}{=} \int_{S^{n-1}} \Big(\int_{\varepsilon}^{\eta} e^{2\pi i Rrx'y'} \frac{dr}{r} \Big) \Omega(y') d\sigma(y') \\
&\quad \underbrace{- \int_{S^{n-1}} \Big(\int_{\varepsilon}^{\eta} \cos(2\pi Rr) \frac{dr}{r} \Big) \Omega(y') d\sigma(y')}_{=(\int_{\varepsilon}^{\eta} \cos(2\pi Rr) \frac{dr}{r}) \underbrace{(\int_{S^{n-1}} \Omega(y') d\sigma(y))}_{=0 \text{ nach (A)}} = 0} \\
&= \int_{S^{n-1}} \Big(\int_{\varepsilon}^{\eta} \big(\underbrace{(\cos(2\pi Rrx'y') - \cos(2\pi Rr))}_{=:\mathrm{Re}} \\
&\quad + i \underbrace{(\sin(2\pi Rrx'y'))}_{=:\mathrm{Im}} \big) \frac{dr}{r} \Big) \Omega(y') d\sigma(y)
\end{aligned}$$

Nun btrachten wir die beiden Integrale über den Real- und Imaginärteil einzeln:

Behauptung 1.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \eta \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{\eta} Im \frac{dr}{r} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(x'y')$$

Beweis von Behauptung 1.
Wir substituieren zuerst einmal $t = 2\pi Rrx'y'$:

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\sin(2\pi Rrx'y')}{r} dr = \int_{\varepsilon 2\pi Rrx'y'}^{\eta 2\pi Rrx'y'} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{2\pi Rrx'y'}} \frac{dt}{2\pi Rrx'y'}$$

Und betrachten nun den Grenzwert dieses Integrals für $\varepsilon \to 0$ und $\eta \to \infty$. Ist das Vorzeichen von $x'y'$ positiv ($\operatorname{sign}(x'y') = 1$), dann erhalten wir das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$. Wenn hingegen $\mathrm{sign}(x'y') = -1$, dann wird die obere Integralgrenze zu $-\infty$, d.h. wir haben dann $\int_0^{-\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\int_{-\infty}^0 \frac{\sin(t)}{t} dt \overset{\text{Fkt'n gerade}}{=} -\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$. Somit also:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_\varepsilon^\eta Im \frac{dr}{r} = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \,\mathrm{sign}(x'y') \overset{\text{F.T.}}{=} \frac{\pi}{2} \mathrm{sign}(x'y') \qquad \square$$

Behauptung 2.

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_\varepsilon^\eta Re \frac{dr}{r} = \log\left(\frac{1}{|x'y'|}\right)$$

Für den Beweis dieser zweiten Behauptung, beweisen wir zuerst einen allgemeienren Grenzwert:

Lemma 1. *Seien $\mu, \lambda > 0$ und h eine im Ursprung differenzierbare Funktion so, dass der Grenzwert $\lim_{\eta\to\infty} \int_1^\eta \frac{h(r)}{r} dr$ existiert. Dann gilt:*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_\varepsilon^\eta \frac{h(\lambda r) - h(\mu r)}{r} dr = h(0) \log\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$$

Beweis.

$$\int_\varepsilon^\eta \frac{h(\lambda r) - h(\mu r)}{r} dr = \int_\varepsilon^\eta \frac{h(\lambda r)}{r} dr - \int_\varepsilon^\eta \frac{h(\mu r)}{r} dr$$

Substituiere nun $\lambda r = t$:

$$\int_\varepsilon^\eta \frac{h(\lambda r)}{r} dr = \int_{\varepsilon\lambda}^{\eta\lambda} \frac{h(t)}{\frac{t}{\lambda}} \frac{dt}{\lambda} = \int_{\varepsilon\lambda}^{\eta\lambda} \frac{h(t)}{t} dt$$

und analog $\mu r = t$:

$$\int_\varepsilon^\eta \frac{h(\mu r)}{r} dr = \int_{\varepsilon\mu}^{\eta\mu} \frac{h(t)}{t} dt$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf mam annehmen, dass $\lambda > \mu$ gilt. Somit:

$$\int_\varepsilon^\eta \frac{h(\lambda r) - h(\mu r)}{r} dr = -\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda} \frac{h(t)}{t} dt + \int_{\eta\mu}^{\eta\lambda} \frac{h(t)}{t} dt$$

Betrachte nun die beiden Summanden $\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda} \frac{h(t)}{t} dt$ und $\int_{\eta\mu}^{\eta\lambda} \frac{h(t)}{t} dt$ einzeln:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda}\frac{h(t)}{t}dt &= \int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda}\frac{h(0)+h(t)-h(0)}{t}dt\\ &= \underbrace{\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda}\frac{h(0)}{t}dt}_{=h(0)(\log(\varepsilon\lambda)-\log(\varepsilon\mu))} + \underbrace{\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda}\frac{h(t)-h(0)}{t}dt}_{\leq\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda}\frac{|h(t)-h(0)|}{t}dt}\end{aligned}$$

Und da nach Mittelwertsatz $|h(t)-h(0)| \leq \sup_{\xi\in[0,\varepsilon\lambda]}|h'(\xi)|(\varepsilon\lambda)$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda}\frac{h(t)-h(0)}{t}dt = 0.$$

Nun schätzen wir den zweiten Term $\int_{\eta\mu}^{\eta\lambda}\frac{h(t)}{t}dt$ ab: Weil nach Voraussetzung $\lim_{\eta\to\infty}\int_1^\eta\frac{h(t)}{t}dt$ existiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl T, so dass für $r, s > T$ die Abschätzung $|\int_{\mu r}^{\lambda r}\frac{h(t)}{t}dt - \int_{\mu s}^{\lambda s}\frac{h(t)}{t}dt| \leq \varepsilon$ gilt. Daraus folgt: $\lim_{\eta\to\infty}\int_{\mu\eta}^{\lambda\eta}\frac{h(t)}{t}dt = 0$.

Zusammen ergibt dies:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}\int_\varepsilon^\eta Re\frac{dr}{r} &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\mu}^{\varepsilon\lambda}\frac{h(t)}{t}dt + \lim_{\eta\to\infty}\int_{\eta\mu}^{\eta\lambda}\frac{h(t)}{t}dt\\ &= h(0)(\log(\varepsilon\lambda)-\log(\varepsilon\mu))\\ &= h(0)\log\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\end{aligned}$$

□

Beweis von Behauptung 2.
Und da nun $\cos(x)$ in 0 differenzierbar ist und $\lim_{\eta\to\infty}\int_1^\eta\frac{\cos(r)}{r}dr$ existiert, können wir die oben bewiesene Formel für $\lambda = 2\pi R|x'y'|$ und $\mu = 2\pi R$ anwenden um Behauptung 2 zu beweisen:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}}\int_\varepsilon^\eta\frac{\cos(2\pi Rr|x'y'|)-\cos(2\pi Rr)}{r}dr &= \underbrace{\cos(0)}_{=1}\log\left(\frac{2\pi R}{2\pi R|x'y'|}\right)\\ &= \log\left(\frac{1}{|x'y'|}\right)\end{aligned}$$ □

Nun können wir Behauptung 1 und Behauptung 2 zusammensetzen und erhalten das gewünschte Resultat:

$$m(x) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \eta \to \infty}} \widehat{K_{\varepsilon,\eta}}(x) = \int_{S^{n-1}} \left(\log\left(\frac{1}{|xy|}\right) + \frac{\pi i}{2} \operatorname{sign}(xy) \right) \Omega(y) d\sigma(y)$$

Zusätzlich ist $m(x)$ homogen vom Grad 0, denn:

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} m(\varepsilon x) &= \int_{S^{n-1}} \Bigg(\underbrace{\log\left(\frac{1}{|\varepsilon xy|}\right)}_{=\log\left(\frac{1}{|xy|}\right) - \log(\varepsilon)} + i\frac{\pi}{2} \underbrace{\operatorname{sign}(\varepsilon xy)}_{=\operatorname{sign}(xy)} \Bigg) \Omega(y) d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} \left(\log\left(\frac{1}{|xy|}\right) + i\frac{\pi i}{2} \operatorname{sign}(xy) \right) \Omega(y) d\sigma(y) \\ &\qquad\qquad - \log(\varepsilon) \underbrace{\int_{S^{n-1}} \Omega(y) d\sigma(y)}_{=0} \\ &= m(x) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1. *Wählt man* $\Omega(y) = \frac{y_j}{|y|}$, *d.h.* $K(y) = \frac{y_j}{|y|^{n+1}}$, *so ist* $T_\varepsilon(f)$ *gerade die Riesz-Transformation und* $m(x)$ *lässt sich stark vereinfachen (siehe nächste Arbeit).*

3. Existenz von $T(f)(x)$ fast überall

Von dem singulären Integraloperator

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y) dy$$

wissen wir, dass er in der L^p-Norm gegen $T(f)$ konvergiert, das heisst es gilt

$$\|T_\varepsilon(f) - T(f)\|_{L^p} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0) \quad \text{für alle} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für} \quad 1 < p < \infty.$$

Diese Tatsache liefert uns eine punktweise, fast überall konvergente Teilfolge $T_{\varepsilon_j}(f)(x)$. Wir können uns fragen, ob dieser punktweise Grenzwert auch existiert, unabhängig von der ε-Folge, welche wir wählen. Die positive Antwort auf diese Frage liefert uns der folgende Satz:

Satz 2. *Sei Ω wie in Satz 1. Für $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, betrachten wir wiederum der Operator*

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy.$$

Dann existiert der punktweise Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)$ für fast alle x in $\mathbb{R}^n$.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir ein Lemma, welches wir aber nicht beweisen werden. Der interessierte Leser ist verwiesen auf das im Seminar verwendete Buch (E. Stein: “Singular integrals and differentiability properties of functions“).

Lemma 2. *Seien f, Ω, p und $T_\varepsilon(f)(x)$ wie in Satz 2. Dann existiert eine Konstante $A_p > 0$, welche unabhängig von f und ε ist, so dass die folgende Ungleichung gilt:*

$$\|T^*(f)\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p},$$

wobei $T^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(f)(x)|$ ist.

Beweis von Satz 2. Um die Existenz dieses Grenzwerts für fast alle x aus $\mathbb{R}^n$ zu zeigen, nehmen wir ein $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$. Wenn dieser punktweise Grenzwert existiert, so konvergiert der Limes superior und der Limes inferior gegen denselben Grenzwert. Also betrachten wir die Differenz der beiden im Absolutbetrag und schauen, was damit passiert. Ist sie null, so existiert der Grenzwert. Also definieren wir

$$\Lambda(f)(x) := |\limsup_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)|.$$

Wir sehen, dass folgende Abschätzung gemacht werden kann:

$$\begin{aligned}
\Lambda(f)(x) &= |\limsup_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)| \\
&\leq |\limsup_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)| + |\liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)| \\
&\leq 2\limsup_{\varepsilon\to 0} |T_\varepsilon(f)(x)| \\
&\leq 2\sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(f)(x)| \\
&= 2T^*(f)(x),
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Ungleichung die Dreiecksungleichung verwendet haben. Somit ist also

$$\Lambda(f)(x) \leq 2T^*(f)(x) \tag{1}$$

Um nun $\Lambda(f)(x)$ abzuschätzen, teilen wir f auf in eine stetig differenzierbare Funktion f_1 mit kompaktem Träger und ein f_2, wobei gilt

$\|f_2\|_{L^p} \leq \delta$. Hier ist δ eine positive reelle Zahl. Aus dem letzten Vortrag (siehe singuläre Integrale - Teil 2) wissen wir, dass $T_\varepsilon(f_1)$ gleichmässig gegen $T(f_1)$ konvergiert. Also konvergiert $T_\varepsilon(f_1)$ insbesondere auch punktweise und wir erhalten somit für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Lambda(f_1)(x) = |\limsup_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_1)(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_1)(x)| \equiv 0.$$

Um $\|\Lambda(f_2)\|_{L^p}$ abzuschätzen, betrachten wir folgende Ungleichung, welche direkt aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$\Lambda(f)(x) \leq \Lambda(f_1)(x) + \Lambda(f_2)(x).$$

Von vorher wissen wir, dass $\Lambda(f_1)(x)$ konstant null ist für alle x in $\mathbb{R}^n$ also haben wir

$$\Lambda(f)(x) \leq \Lambda(f_2)(x).$$

Aber für $\Lambda(f_2)(x)$ gilt

$$\begin{aligned}\|\Lambda(f)\|_{L^p} \leq \|\Lambda(f_2)\|_{L^p} &\leq 2\|T^*(f_2)\|_{L^p}\\ &\leq 2A_p\|f_2\| \leq 2A_p\delta,\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Ungleichung das analoge Argument wie bei (1) verwendet haben. Die zweite Ungleichung bekommen wir durch Anwendung von Lemma 1 und die letzte, indem wir die Wahl von f_2 verwendet haben. Da $\delta > 0$ beliebig gewählt werden konnte, erhalten wir $\Lambda(f)(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn wir uns die Definition von $\Lambda(f)(x)$ betrachten, sehen wir, dass also der Limessuperior gegen den Limesinferior konvergiert (und umgekehrt) und somit existiert $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)$ für fast alle x aus $\mathbb{R}^n$ und zwar für alle $p \in (1, \infty)$. $\square$

Satz 2 gilt auch für den Fall $p = 1$. Um dies zu beweisen, betrachten wir folgendes Lemma. Auch dieses werden wir hier nicht beweisen, weil dessen Beweisidee analog zum Beweis vom Satz von Whitney (s. Vortrag "Calderòn-Zygmund Zerlegung") ist.

Lemma 3. *Sei Ω definiert wie in Satz 2 und $f \in L^1(R^n)$. Dann ist die Abbildung $f \mapsto T^*(f)$ vom schwachen Typ (1,1), das heisst es existiert eine Konstante $A_p > 0$, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$m(T(f), \alpha) \leq \frac{A\|f\|_{L^1}}{\alpha}$$

für alle $\alpha > 0$, wobei m das Lebesguemass auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Mit diesem Lemma folgt in unserem Fall folgendes:

$$
\begin{aligned}
&m\{x\,|\Lambda(f)(x) > \alpha\}\\
&\qquad \le m\{x \mid \Lambda(f_2) > \alpha\}\\
&\qquad \le m\{x \mid |\limsup_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_2)(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_2)(x)| > \alpha\}\\
&\qquad \le m\{x \mid |\limsup_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_2)(x)| + |\liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_2)(x)| > \alpha\}\\
&\qquad \le m\{x \mid |\limsup_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_2)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}\\
&\qquad\qquad + m\{x \mid |\liminf_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f_2)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}\\
&\qquad \le m\{x \mid \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(f_2)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}\\
&\qquad\qquad + m\{x \mid \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon(f_2)(x)| > \frac{\alpha}{2}\}\\
&\qquad \le \frac{c}{\alpha/2}\|T_\varepsilon(f_2)\|_{L^1} + \frac{c}{\alpha/2}\|T_\varepsilon(f_2)\|_{L^1} =: \frac{A}{\alpha}\|f_2\|_{L^1}\\
&\qquad \le \frac{A\delta}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Wobei wir die erste Ungleichung wieder aus der Gleichung $\Lambda(f)(x) \le \Lambda(f_1)(x) + \Lambda(f_2)(x)$ und der Tatsache, dass $\Lambda(f_1)(x) = 0$ bekommen. Und somit folgt, dass $\Lambda(f)(x) = 0$ fast überall und somit existiert mit der selben Begründung wie im Beweis von Satz 2 der Grenzwert $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x)$ für fast alle x aus $\mathbb{R}^n$.