1 Calderón-Zygmund-Ungleichung

In unserem letzten Kapitel wollen wir die Calderón-Zygmund-Ungleichung beweisen. Sie besagt folgendes.

THEOREM: (Calderón-Zygmund)
Sei f eine C^2-Funktion mit kompakten Träger. Sei $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$. Dann haben wir a priori die Schranke

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p \leq A_p \left\| \Delta f \right\|_p \quad 1 < p < \infty$$

Um diese Aussage auf schönem Wege beweisen zu können, benutzen wir die sogenannte Riesz-Transformation. Zuerst werden wir aber den eindimensionalen Fall der Riesz-Transformation betrachten: die Hilbert-Transformation. Wichtige Eigenschaften, welche wir für den Beweis verwenden werden, beweisen wir zuerst für die Hilbert-Transformation. Anschliessend werden wir diese Behauptungen auf den n-dimensionalen Fall ausweiten.

1.1 Die Hilbert-Transformation

Definition: Der Operator $H : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ mit

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy \tag{1}$$

heisst *Hilbert-Transformation*.

Der Kern dieser Transformation ist somit gegeben durch

$$K(x) = \frac{1}{\pi x}$$

und mit $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|}$ erhalten wir

$$\Omega(x) = |x| \, K(x) = \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{x} = \frac{1}{\pi} \text{sign}(x).$$

Gemäss Theorem 1 aus dem 3. Teil über singuläre Integrale wissen wir, dass es einen Multiplikator $m(x)$ gibt, sodass

$$\widehat{(Hf)}(x) = m(x) \hat{f}(x)$$

gilt. Hier zur Erinnerung nochmals die Aussage des Satzes.

Satz 1 Sei Ω homogen vom Grad 0 und erfülle Ω:

$$(a) \quad \int_{S^{n-1}} \Omega(x) d\sigma = 0 \quad \text{(Auslöschung)} \tag{2}$$

$$(b) \qquad \sup_{\substack{|x-x'|\leq\delta \\ |x|=|x'|=1}} |\Omega(x)-\Omega(x')| = \omega(\delta) \Rightarrow \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty \quad \text{(Glattheit)} \tag{3}$$

Sei weiters $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $T(f) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$. Dann:

- $\widehat{(Tf)}(x) = m(x)\hat{f}(x)$, wobei
- $m(x) = \int_{S^{n-1}} \left[\log\left(\frac{1}{|xy|}\right) + i\frac{\pi}{2}\text{sign}(xy)\right] \Omega(y)d\sigma(y), \quad |x| = 1$
- und $m(x)$ ist homogen vom Grad 0.

Diesen Satz dürfen wir anwenden, da das $\Omega(x)$ der Hilbert-Transformation die Voraussetzungen erfüllt.

$$\begin{aligned}
\text{Auslöschungsbedingung:} \qquad \int_{S^0} \Omega(x)dx &= \Omega(-1) + \Omega(1) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\text{sign}(-1) + \text{sign}(1)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Glattheitsbedingung: Da für $x, x' \in \mathbb{R}$ mit $\|x\| = \|x'\| = 1$ gelten muss

$$|x-x'| = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x = x' \\ 2 & x = -x' \end{array} \right\},$$

folgt daraus direkt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta &= \int_0^1 \frac{1}{\pi\delta} \left|\text{sign}(x) - \text{sign}(x')\right| d\delta \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\pi\delta} \cdot 0 d\delta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit können wir mit der im Satz angegeben Formel unseren Multiplikator m berechnen.

$$\begin{aligned}
m(x) &= \int_{S^{n-1}} \left[\frac{\pi i}{2}\text{sign}(x\cdot y) + \log\left(\frac{1}{|x\cdot y|}\right)\right] \Omega(y)d\sigma(y) \\
&= \int_{S^0} \left[\frac{\pi i}{2}\text{sign}(x\cdot y) + \log\left(\frac{1}{|x\cdot y|}\right)\right] \frac{1}{\pi}\text{sign}(y)d\sigma(y) \\
&\overset{S^0=\{\pm 1\}}{=} \left[\frac{\pi i}{2}\text{sign}(x) + \log\left(\frac{1}{|x|}\right)\right]\Omega(1) + \left[\frac{\pi i}{2}\text{sign}(-x) + \log\left(\frac{1}{|-x|}\right)\right]\Omega(-1) \\
&= \frac{i}{2}\text{sign}(x) + \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{|x|}\right) + \frac{i}{2}\text{sign}(x) - \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1}{|x|}\right) \\
&= i\text{sign}(x)
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\widehat{(Hf)}(x) = i\mathrm{sign}(x)\hat{f}(x). \tag{4}$$

Da der Kern von H die Form $\frac{\Omega(x)}{|x|}$ hat, kommutiert gemäss dem 2.Teil über singuläre Integrale H mit positiven Dilatationen. Durch Nachrechnen sieht man, dass H mit negativen Dilatationen antikommutiert, d.h.

$$H\tau_\delta = -\tau_\delta H.$$

Zudem ist offensichtlich, dass H ebenfalls mit Translationen kommutiert. Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Hilber-Transformation, was wir in dem folgenden Satz festhalten möchten.

PROPOSITION 1 Sei T ein beschränkter Operator von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$, der folgende Bedingungen erfüllt:

- T kommutiert mit Translationen
- T kommutiert mit positiven Dilatationen
- T antikommutiert mit der Reflexion $f(x) \longrightarrow f(-x)$

Dann ist T ein konstantes Vielfaches der Hilbert-Transformation.

Beweis: Für den Beweis nehmen wir die Fouriertransformation zu Hilfe. Gemäss einem Satz aus dem Kapitel der dingulären Integrale wissen wir, dass für einen beschränkten Operator auf $L^2(\mathbb{R})$ eine beschränkte Funktion $m(x)$ existiert, sodass $\widehat{(Tf)}(x) = m(x)\hat{f}(x)$ gilt. Um eine angenehmer Notation zu haben, setzen wir $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\tau_\delta f)(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixy}(\tau_\delta f)(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixy} f(\delta x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\frac{x'}{\delta}y} f(x') \left|\delta^{-1}\right| dx' \\
&= |\delta|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ix'(\delta^{-1}y)} f(x')dx' \\
&= |\delta|^{-1} (\mathcal{F}f)(\delta^{-1}y) \\
&= |\delta|^{-1} (\tau_{\delta^{-1}}\mathcal{F}f)(y)
\end{aligned}$$

Weil dies für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt, folgt daher

$$\mathcal{F}\tau_\delta = |\delta|^{-1} \tau_{\delta^{-1}}\mathcal{F}. \tag{5}$$

Die zweite und dritte Voraussetzung der Proposition an den Operator T ist äquivalent zu

$$T\tau_\delta = \operatorname{sign}(\delta)\tau_\delta T. \tag{6}$$

Wir definieren den Operator $M : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ durch $Mf = m \cdot f$. Dann kann man die Relation des Multiplikators schreiben als

$$\mathcal{F}T = M\mathcal{F} \tag{7}$$

Mit diesen drei Formeln können wir nun schliessen:

$$\begin{aligned}
\tau_\delta M &\overset{(7)}{=} \underbrace{\tau_\delta \mathcal{F}}\, T\mathcal{F}^{-1} \\
&\overset{(5)}{=} |\delta|^{-1}\, \mathcal{F}\, \underbrace{\tau_{\delta^{-1}} T}\, \mathcal{F}^{-1} \\
&\overset{(6)}{=} |\delta|^{-1} \operatorname{sign}(\delta^{-1}) \mathcal{F}T\, \underbrace{\tau_\delta \mathcal{F}^{-1}} \\
&\overset{(5)}{=} \underbrace{|\delta|^{-1} \operatorname{sign}(\delta^{-1})\, |\delta|}\, \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}\tau_\delta \\
&= \operatorname{sign}(\delta)\, \underbrace{\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}}\, \tau_\delta \\
&\overset{(7)}{=} \operatorname{sign}(\delta) M \tau_\delta
\end{aligned}$$

Wir finden also, dass

$$\tau_\delta M = \operatorname{sign}(\delta) M \tau_\delta$$

gilt. Wenden wir nun den Operator auf der linken Seite auf eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ an, folgt

$$\left((\tau_\delta M) f\right)(x) = \left(\tau_\delta (Mf)\right)(x) = (Mf)(\delta x) = m(\delta x) \cdot f(\delta x).$$

Dasselbe Vorgehen auf der rechten Seite liefert

$$\operatorname{sign}(\delta)\left((M\tau_\delta) f\right)(x) = \operatorname{sign}(\delta) M(\tau_\delta f)(x) = m(x) \cdot (\tau_\delta f)(x) = \operatorname{sign}(\delta) m(x) \cdot f(\delta x).$$

Da dies für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt, folgt

$$m(\delta x) = \operatorname{sign}(\delta) m(x), \quad \delta \neq 0.$$

Somit ist der Multiplikator von der Form

$$m(x) = c \cdot \mathrm{sign}(x), \quad c \in \mathbb{C}.$$

Es gilt also

$$\mathcal{F}T = m\mathcal{F} = c \cdot \mathrm{sign}(x)\mathcal{F} = (-ic) \cdot i \cdot \mathrm{sign}(x)\mathcal{F} \overset{(4)}{=} (-ic) \cdot \mathcal{F}H = \mathcal{F}(-ic \cdot H),$$

womit der Satz bewiesen ist.

q.e.d.

Als nächstes machen wir nun den Sprung von einer zu n Dimensionen. Wir werden die Hilbert-Transformation für den mehrdimensionalen Fall „umschreiben", woraus die Riesz-Transformation entsteht. Zudem gelten die analogen Aussagen, welche wir gerade bewiesen haben, auch im allgemeinen Fall. Das heisst, es gibt eine analoge Aussage von Proposition 1 für die Riesz-Transformation.

1.2 Riesz-Transformation

Beginnen wir vorerst mit einigen elementaren Beobachtungen. Sei $m(x) = (m_1(x), m_2(x), \ldots, m_n(x))$ ein n-Tupel von Funktionen, welches auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Für eine beliebige Rotation $\rho \in SO(n)$ schreiben wir $\rho = (\rho_{jk})$ für die dazugehörige Matrixschreibweise. Falls die Funktion $m(x)$ als ein Vektor transformiert, kommutiert sie mit beliebigen Rotationen ρ:

$$m(\rho(x)) = \rho(m)(x),$$

oder expliziter formuliert

$$m_j(\rho(x)) = \sum_k \rho_{jk} m_k(x), \quad \text{für jede Rotation } \rho. \tag{8}$$

LEMMA Sei m homogen mit Grad 0, d.h. $m(\delta x) = m(x)$ für $\delta > 0$. Falls sich m gemäss (8) verhält, dann gilt $m(x) = c\frac{x}{|x|}$ für eine Konstante c, d.h.

$$m_j(x) = c\frac{x_j}{|x|}$$

Beweis: Dank der Homogenität von m genügt es, x auf der Einheitssphäre zu betrachten. Seien e_1, e_2, ..., e_n die übliche Einheitsvektoren. Für jede Rotation $\rho \in SO(n)$, die e_1 festhält, ergibt (8):

$$\rho(m(e_1)) = m(\rho(e_1)) = m(e_1) = (m_1(e_1), m_2(e_1), ..., m_n(e_1)). \tag{9}$$

Das bedeutet, dass der $(n-1)$-dimensionale Vektor $(m_2(e_1), m_2(e_3), ..., m_n(e_1))$ für jede Rotation, die e_1 festhält, unverändert bleibt. Daraus folgt offenbar

$$m_2(e_1) = m_3(e_1) = ... = m_n(e_1) = 0. \tag{10}$$

Für ein beliebiges $\rho \in SO(n)$ gilt daher gemäss (8)

$$m_j(\rho(e_1)) = \rho_{j1}m_1(e_1) + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \rho_{jk}m_k(e_1)}_{=0} = \rho_{j1}\underbrace{m_1(e_1)}_{=:c} = c\rho_{j1}.$$

Sei nun $x \in S^{n-1}$ fest. Dann finden wir ein $\rho \in SO(n)$, sodass $x = \rho(e_1)$ gilt. Dadurch erhält man $x_j = \rho_{j1}$. Es gilt also

$$m_j(x) = c \cdot x_j,$$

was genau der Behauptung des Lemmas entspricht.

q.e.d.

Nun sind wir in der Lage die Riesz-Transformation zu definieren.

Definition: Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann nennen wir

$$R_j(f)(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} c_n \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)dy, \quad j = 1, \ldots, n \tag{11}$$

die *Riesz-Transformation*, wobei c_n eine Konstante ist, die wir später noch genauer charakterisieren werden.

Gemäss der Definition (11) finden wir als Kern $K_j(x) = \frac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$ für $\Omega_j(x) = c_n\frac{x_j}{|x|}$. Wie bei der Hilbert-Transformation erfüllt auch dieses Ω_j die Bedingungen (2) und (3) von Satz 1 vom 3. Teil über singuläre Integrale.

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \Omega_j(x)dx &= \int_{S^{n-1}} c_n \frac{x_j}{|x|}dx \\
&= c_n \int_{S^{n-1}} \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\text{gerade}} \underbrace{x_j}_{\text{ungerade}} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta &= \int_0^1 \frac{1}{\delta}\left(\sup_{\substack{|x-x'|<\delta \\ \|x\|=\|x'\|=1}} |\Omega_j(x)-\Omega_j(x')|\right) d\delta \\
&= \int_0^1 \frac{c_n}{\delta} \sup_{\substack{|x-x'|<\delta \\ \|x\|=\|x'\|=1}} \left|\frac{x_j}{|x|}-\frac{x'_j}{|x'|}\right| d\delta \\
&= \int_0^1 \frac{c_n}{\delta} \sup_{\substack{|x-x'|<\delta \\ \|x\|=\|x'\|=1}} |x-x'|\, d\delta \\
&\leq \int_0^1 c_n d\delta \\
&= c_n < \infty
\end{aligned}$$

Für die Riesz-Transformation $R_j : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ existiert also ein Multiplikator $m = (m_1, \ldots, m_n)$, sodass

$$(\widehat{R_j(f)})(x) = m_j(x)\hat{f}(x)$$

gilt. Jetzt wollen wir das Lemma auf den Multiplikator anwenden: wir wissen dafür bereits, dass er homogen vom Grad 0 ist und es bleibt nur noch die Kommutativität mit Rotationen zu zeigen:

$$\begin{aligned}
m(\rho(x)) &= c_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\pi i}{2}\mathrm{sign}(\rho(x)\cdot y) + \log\left|\frac{1}{\rho(x)\cdot y}\right|\right)\Omega(y)d\sigma(y) \\
&= c_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\pi i}{2}\mathrm{sign}(x\cdot \rho^{-1}(y)) + \log\left|\frac{1}{x\cdot \rho^{-1}(y)}\right|\right)\frac{y}{|y|}d\sigma(y) \\
&= c_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\pi i}{2}\mathrm{sign}(x\cdot y) + \log\left|\frac{1}{x\cdot y}\right|\right)\frac{\rho(y)}{|y|}\underbrace{det(\rho)}_{=1}d\sigma(y) \\
&= \rho(m(x))
\end{aligned}$$

Dank der Formel des oben erwähnten Satzes bekommen wir für unseren Multiplikator

$$\begin{aligned}
m_j(x) &= c_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\pi i}{2}\mathrm{sign}(x\cdot y) + \log\left|\frac{1}{x\cdot y}\right|\right)\Omega_j(y)d\sigma(y) \\
&= c_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\pi i}{2}\mathrm{sign}(x\cdot y) + \log\left|\frac{1}{x\cdot y}\right|\right)\frac{y_j}{|y|}d\sigma(y) \\
&\overset{\text{gemäss Lemma}}{=} c\frac{x_j}{|x|}.
\end{aligned}$$

Da c eine Konstante ist, genügt es c für ein bestimmtes x zu berechnen. Wir wählen $x = e_j$. Dadurch folgt

$$c_n\left[\int_{S^{n-1}} \frac{\pi i}{2}\mathrm{sign}(y_j)y_j d\sigma(y) + \underbrace{\int_{S^{n-1}} \log\left|\frac{1}{y_j}\right| y_j d\sigma(y)}_{=0}\right] = c.$$

Wir wählen die Konstante c_n in der Definition (11) nun so, dass $c = i$ gilt. Dies ist dann äquivalent zur Gleichung

$$c_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_{S^{n-1}} |y_j| \, d\sigma(y) \right)^{-1}.$$

Berechnet man dieses Integral, erhält man

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Zusammengefasst heisst dies nun, dass wir für $c_n = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$ die Konstante $c = i$ bekommen und der Multiplikator daher die Gestalt

$$m_j(x) = i \frac{x_j}{|x|}$$

hat, d.h.

$$\widehat{(R_j f)}(x) = i \frac{x_j}{|x|} \hat{f}(x) \quad j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Wie im vorherigen Kapitel angekündigt, gibt es auch für die Riesz-Transformation eine analoge Aussage zu Proposition 1. Dazu übertragen wir lediglich noch die Eigenschaft (8) des Multiplikators m auf R_j. Es gilt

$$\rho R_j \rho^{-1} f = \sum_k \rho_{jk} R_k f.$$

PROPOSITION 2 Sei $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ ein n-Tupel von beschränkten Transformationen von $L^2(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Es gelte

1. Jedes T_j kommutiert mit Translationen in $\mathbb{R}^n$.
2. Jedes T_j kommutiert mit Dilatation in $\mathbb{R}^n$.
3. Für jede Rotation $\rho = (\rho_{jk})$ in $\mathbb{R}^n$ gilt $\rho T_j \rho^{-1} f = \sum_k \rho_{jk} T_k f$.

Dann sind die T_j konstante Vielfache der Riesz-Transformation R_j, d.h. es existiert eine Konstante c, sodass $T_j = c R_j$ für $j = 1, \ldots n$.

Den Beweis dieser Proposition überlassen wir dem Leser. Es ist eigentlich nur ein Zusammentragen der bisherigen Erkenntnisse und ist ausserdem vergleichbar mit dem analogen Satz für die Hilbert-Transformation.

1.3 Beweis der Calderón-Zygmund-Ungleichung

Wir wissen aus dem 3. Teil über singuläre Integrale (Theorem 1), dass die Riesz-Transformation in der L^p-Norm beschränkt ist. Wir können also schreiben

$$\|R_j\|_p \leq A_{j,p} \tag{13}$$

Wir zeigen nun folgende Identität für eine Funktion $f \in C^2$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = -R_j R_k \Delta f \tag{14}$$

Es gilt $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} f(y)dy$. Wir bekommen also für die Fouriertransformation von $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ den Ausdruck $2\pi i x_j \hat{f}(x)$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}}\right)(x) &= -2\pi i x_j \left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)(x) \\
&= -4\pi^2 x_j x_k \hat{f}(x) \\
&= -\left(\frac{i x_j}{|x|}\right)\left(\frac{i x_k}{|x|}\right)(-4\pi^2 |x|^2)\hat{f}(x) \\
&= -\underbrace{\left(\frac{i x_j}{|x|}\right)}_{m_j(x)}\underbrace{\left(\frac{i x_k}{|x|}\right)}_{m_k(x)}\widehat{(\Delta f)}(x) \\
&\overset{(12)}{=} -\left(\frac{i x_j}{|x|}\right)(\widehat{R_k \Delta f})(x) \\
&\overset{(12)}{=} -(\widehat{R_j R_k \Delta} f)(x)
\end{aligned}$$

Damit folgt (14) mit der Eindeutigkeit der Fourier-Transformation.
Dank dieser Formel und der Beschränktheit der Riesz-Transformation in der L^p-Norm lässt sich die Calderón-Zygmund-Ungleichung nun direkt beweisen.

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right\|_p &\overset{(14)}{=} \|-R_j R_k \Delta f\|_p \\
&\leq \|R_j\|_p \|R_k\|_p \|\Delta f\|_p \\
&\overset{(13)}{\leq} \underbrace{A_{j,p} \cdot A_{k,p}}_{=:A_p} \|\Delta f\|_p \\
&= A_p \|\Delta f\|_p
\end{aligned}$$

q.e.d.

1.4 Weitere Anwendung

Eine weitere nützliche Anwendung der Riesz-Transformation ist der Beweis der Ungleichung

THEOREM: Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^1-Funktion. Dann gilt

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_p + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p \leq A_p \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p, \quad 1 < p < \infty. \tag{15}$$

Den Beweis hierzu führen wir ähnlich wie denjenigen der Calderón-Zygmund-Ungleichung. Nur mit dem Unterschied, dass wir eine andere Identität verwenden. Die hier verwendete Gleichung lautet

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -R_j(R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad j = 1, 2. \tag{16}$$

Beginnen wir einmal rechts und benutzen die Fouriertransformation.

$$\begin{aligned}
& \left(-R_j(R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right)\hat{}(x) \\
= \; & -\frac{ix_j}{|x|}\left(R_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + R_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + iR_1\frac{\partial f}{\partial x_2} - iR_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\hat{}(x) \\
= \; & -\frac{ix_j}{|x|}\left[\frac{ix_1}{|x|}\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}(x) + \frac{ix_2}{|x|}\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}(x) - \frac{x_1}{|x|}\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}(x) + \frac{x_2}{|x|}\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x1}\right)}(x)\right] \\
= \; & -\frac{ix_j}{|x|^2}\left[ix_1\left(-2\pi ix_1\hat{f}(x)\right) + ix_2\left(-2\pi ix_2\hat{f}(x)\right) + \underbrace{2\pi ix_1x_2\hat{f}(x) - 2\pi ix_1x_2\hat{f}(x)}_{=0}\right] \\
= \; & -\frac{2\pi ix_j}{|x|^2}\underbrace{\left[x_1^2 + x_2^2\right]}_{=|x|^2}\hat{f}(x) \\
= \; & -2\pi ix_j\hat{f}(x) \\
= \; & \widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(x).
\end{aligned}$$

Wir hätten die Gleichung (16) hiermit gezeigt. Nun verwenden wir diese Identität und die L^p-Beschränktheit der Riesz-Transformation, um die Behauptung (15) zu zeigen.

$$\begin{aligned}
& \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_p + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p \\
= \; & \left\|-R_1(R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right\| + \left\|-R_2(R_1 - iR_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right\| \\
\leq \; & \|R_1\|_p\|R_1 - iR_2\|_p\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p + \|R_2\|_p\|R_1 - iR_2\|_p\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p \\
\leq \; & \|R_1\|_p\left(\|R_1\|_p + \|R_2\|_p\right)\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p + \|R_2\|_p\left(\|R_1\|_p + \|R_2\|_p\right)\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p \\
= \; & \underbrace{\left(\|R_1\|_p + \|R_2\|_p\right)^2}_{=:A_p}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p \\
= \; & A_p\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p
\end{aligned}$$

q.e.d.