(Pro-)Seminar: Grundideen der harmonischen Analysis

TH2 - Zerlegung offener Mengen in $\mathbb{R}^n$ in Würfel

Das Ziel des folgenden Satzes ist es, zu beweisen, dass man das Komplement Ω einer abgeschlossenen Menge F als Vereinigung von abgeschlossenen Würfel darstellen kann, die die besondere Eigenschaft haben, dass ihr Durchmesser ungefähr proportional zum Abstand von F ist.

Satz 1: (Whitney)
Sei F eine abgeschlossene, nicht-leere Menge in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Folge von achsenparallelen Würfeln Q_k, so dass

1. $\Omega = F^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$
2. $Q_j^o \cap Q_k^o = \emptyset$, wobei Q^o das Innere von Q bezeichnet.
3. $\operatorname{diam}(Q_k) \leq \operatorname{dist}(Q_k, F) \leq 4 \cdot \operatorname{diam}(Q_k)$.

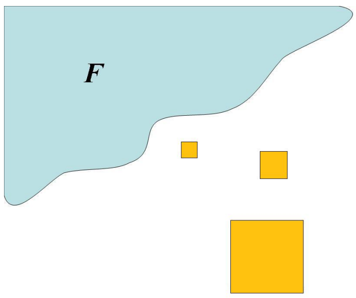

Abbildung 1: Illustration des Satzes von Whitney

Unter einem Würfel verstehen wir hier einen abgeschlossenen Würfel. Wir sprechen von disjunkten Würfeln, wenn das Innere der beiden Würfel disjunkt ist, so wie es im zweiten Punkt des Satzes beschieben ist.

Beweis:

Sei $\mathcal{M}_0$ die Menge der abgeschlossenen Einheitswürfel, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben. Diese Würfel sind in unserem Sinne disjunkt. Allerdings decken sie nicht nur Ω ab, sondern ganz $\mathbb{R}^n$. Deshalb brauchen wir ein feineres Netz.

Definiere

$$\mathcal{M}_k := \left\{ 2^{-k} Q \mid Q \in \mathcal{M}_0 \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

$\mathcal{M}_{k+1}$ entsteht aus $\mathcal{M}_k$ indem jeder Würfel durch Halbieren seiner Kanten in 2^n Würfel geteilt wird. Die Seitenlänge eines Würfels in $\mathcal{M}_k$ beträgt entsprechend $s = 2^{-k}$, der Durchmesser $\operatorname{diam}(Q) = \sqrt{n} 2^{-k}$.

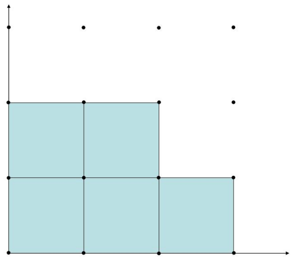

Abbildung 2: $\mathcal{M}_0$

Für ein festes $c > 0$, das wir später wählen, definieren wir die Niveaumengen

$$\Omega_k := \left\{ x \mid c \cdot 2^{-k} < \operatorname{dist}(x, F) \leq c \cdot 2^{-k+1} \right\}.$$

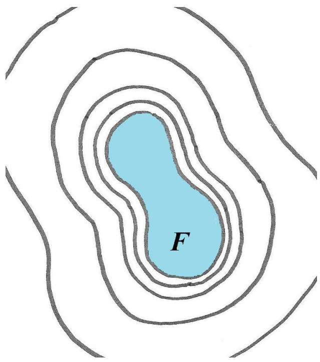

Abbildung 3: Ω_k

Offensichtlich gilt

$$\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k.$$

Nun definieren wir die Familie $\mathcal{F}_0$ folgendermassen. Wir nehmen die Würfel aus $\mathcal{M}_k$ (für jedes k) und fügen sie zu $\mathcal{F}_0$ hinzu, wenn der Schnitt mit Ω_k nicht leer ist, das heisst

$$\mathcal{F}_0 := \bigcup_k \{ Q \in \mathcal{M}_k \mid Q \cap \Omega_k \neq \emptyset \}.$$

So erreichen wir, dass die Würfel in $\mathcal{F}_0$ desto kleiner sind, je näher sie an F sind.

Dann gilt

$$\Omega \subset \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q.$$

Nun zeigen wir, dass die Vereinigung unserer Würfel nur Ω und nicht auch noch Teile von F abdeckt. Hierzu beweisen wir folgende Behauptung.

Behauptung: Für ein geeignetes $c > 0$ gilt

$$\operatorname{diam}(Q) \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq 4 \cdot \operatorname{diam}(Q), \quad \text{für alle } Q \in \mathcal{F}_0.$$

Insbesondere gilt für alle Würfel $Q \in \mathcal{F}_0$

$$F \cap Q = \emptyset.$$

Daraus folgt

$$\Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_0} Q.$$

Beweis der Behauptung

Sei $Q \in \mathcal{F}_0$. Annahme: Q sei aus $\mathcal{M}_k$.
Dann ist der Durchmesser $\operatorname{diam}(Q) = \sqrt{n}2^{-k}$.
Weil Q in $\mathcal{F}_0$ ist, ist der Schnitt von Q mit Ω_k nicht leer. Es gibt also ein $x \in Q \cap \Omega_k$.

Aus der Definition von Ω_k folgen

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(Q, F) &\leq \operatorname{dist}(x, F) \leq c \cdot 2^{-k+1}, \\ \operatorname{dist}(Q, F) &\geq \operatorname{dist}(x, F) - \operatorname{diam}(Q) > c \cdot 2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k}. \end{aligned}$$

Nun wählen wir $c = 2\sqrt{n}$.
Dann folgt aus der ersten Ungleichung

$$\operatorname{dist}(Q, F) \leq \sqrt{n} \cdot 2^{-k+2} = 4 \cdot \operatorname{diam}(Q).$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt

$$\operatorname{dist}(Q, F) > \sqrt{n}2^{-k+1} - \sqrt{n}2^{-k} = \operatorname{diam}(Q).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun haben wir also eine Überdeckung von Ω durch Würfel $Q \in \mathcal{F}_0$ gefunden. Diese Überdeckung erfüllt all unsere Bedingungen mit Ausnahme der Disjunktheit der Würfel. Deshalb müssen wir unsere Bedingungen an $\mathcal{F}_0$ so anpassen, dass unnötige Würfel ausgeschlossen werden.

Aufgrund der Konstruktion sind zwei Würfel $Q_1 \in \mathcal{M}_{k_1}$ und $Q_2 \in \mathcal{M}_{k_2}$ entweder disjunkt oder der eine im anderen enthalten.

Wir starten nun mit einem beliebigen Würfel $Q \in \mathcal{F}_0$. Betrachte den maximalen Würfel in $\mathcal{F}_0$ der Q enthält. Dieser maximale Würfel Q' ist für jedes Q eindeutig, denn einerseits gilt

$$\operatorname{diam}(Q') \leq \operatorname{dist}(Q', F) \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq (4 \cdot \operatorname{diam}(Q),$$

andererseits folgt aus der soeben gemachte Bemerkung, dass wenn Q in Q'

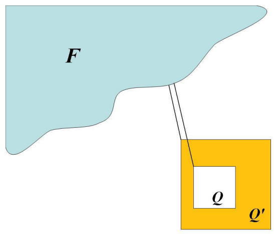

Abbildung 4: Maximale Würfel

und Q'' enthalten ist, entweder $Q' \subset Q''$ oder $Q'' \subset Q'$ ist.

Aufgrund der gleichen Überlegung sind maximale Würfel zu verschiedenen Q's entweder identisch oder disjunkt.

Wir definieren nun $\mathcal{F}$ als die Menge der maximalen Würfel aus $\mathcal{F}_0$. Diese Menge erfüllt nun alle geforderten Bedingungen. Der Satz ist damit bewiesen.

q.e.d.

Der eben bewiesene Satz soll uns helfen, den folgenden Satz von Calderòn-Zygmund zu verstehen. Dieser gibt uns einerseits einen weiteren Ansatz zum Beweis des Maximaltheorems (siehe später), andererseits kann er bei singulären Integralen angewendet werden. Hierzu verweise ich auf spätere Vorträge.

Satz 2: (Calderòn-Zygmund)
Sei f eine nicht-negative, auf $\mathbb{R}^n$ integrierbare Funktion. Sei $\alpha > 0$. Dann gibt es eine Zerlegung von $\mathbb{R}^n$, so dass

1. $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$.
2. $f(x) \leq \alpha$ für fast alle $x \in F$.
3. Ω lässt sich schreiben als die Vereinigung von disjunkten Würfeln Q_k, so dass für jedes Q_k gilt

$$\alpha < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)dx \leq 2^n \alpha. \tag{1}$$

Beweis:

Wir beginnen mit einer einfachen Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in disjunkte Würfel Q'. Diese Würfel seien alle gleich gross und zwar gross genug, dass $\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} f \leq \alpha$.

Sei nun Q' ein solcher Würfel. Auch hier teilen wir den Würfel wieder in 2^n Würfel, analog zum letzten Beweis. Sei Q'' ein solcher neuer Würfel.

Nun gilt entweder

$$\frac{1}{m(Q'')}\int_{Q''} f \leq \alpha$$

oder

$$\frac{1}{m(Q'')}\int_{Q''} f > \alpha.$$

Trifft der zweite Fall zu, so ist auch (1) erfüllt, denn

$$\alpha < \frac{1}{m(Q'')}\int_{Q''} f(x)dx \leq \frac{1}{2^{-n}m(Q')}\int_{Q'} f(x)dx \leq 2^n\alpha.$$

In diesem Fall unterteilen wir Q'' nicht erneut, sondern nehmen Q'' in die Menge der Würfel Q_k des Satzes auf.
Erfüllt Q'' den ersten Fall, teilen wir Q'' wiederum in 2^n Würfel und wiederholen dieses Verfahren bis wir (wenn überhaupt) im zweiten Fall landen.

Dieses Prozedere wiederholen wir für jeden Startwürfel Q'.

Dann definieren wir

$$\Omega := \bigcup_k Q_k.$$

Aufgrund des Differentiationssatzes von Lebesgue gilt

$$f(x) = \lim_{\mathrm{diam}(Q)\to 0} \frac{1}{m(Q)}\int_Q f(y)dy \quad \text{für fast alle } x \in Q, Q \subset F$$

Auf $F = \Omega^c$ gilt also fast überall $f(x) \leq \alpha$. Damit ist der Satz bewiesen.

q.e.d.

Satz 3: Seien $f, \alpha, F, \Omega, Q_k$ wie in Satz 2, wobei Q_k die dritte Eigenschaft von Satz 1 erfüllen. Dann gibt es Konstanten A, B, so dass

1. $m(\Omega) \leq \frac{A}{\alpha}\left\|f\right\|_{L_1}$,
2. $\frac{1}{m(Q_k)}\int_{Q_k} f(x)dx \leq B\alpha$.

Beweis:

Wir definieren F und Ω durch die Maximalfunktion.

$$\begin{aligned} F &= \{x \mid Mf(x) \leq \alpha\} \\ \Omega &= \{x \mid Mf(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

Die Menge F ist also nicht einfach die Menge der Punkte x mit $f(x) \leq \alpha$, sie wird bestimmt durch die Maximalfunktion.

Teil b) des Maximaltheorems besagt

$$m(\Omega) \leq \frac{5^n}{\alpha} \|f(x)\|_{L_1}.$$

Die erste Ungleichung ist also mit $A = 5^n$ erfüllt.

Die Maximalfunktion ist nach unten halbstetig, das heisst, dass aus $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$ folgt, dass $Mf(x) \leq \liminf_{n\to\infty} Mf(x_n)$ gilt. Daher ist F abgeschlossen. Also gibt es nach Satz 1 Würfel Q_k, die Ω überdecken und Durchmesser haben, die ungefähr proportional zum Abstand zu F sind.

Sei Q_k einer dieser Würfel und sei p_k der Punkt auf F mit dem kleinsten Abstand zu Q_k, das heisst

$$\operatorname{dist}(F, Q_k) = \operatorname{dist}(p_k, Q_k).$$

Sei B_k der kleinste Ball mit Mittelpunkt in p_k, der Q_k^o enthält.

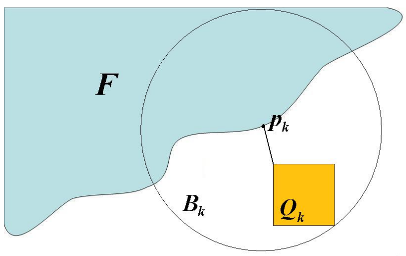

Abbildung 5: B_k

Dann gilt mit $\gamma_k := \frac{m(B_k)}{m(Q_k)}$

$$\alpha \geq Mf(p_k) \geq \frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} f(x)dx \geq \frac{1}{\gamma_k \cdot m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)dx \leq \gamma_k \alpha.$$

Wählen wir nun für B das grösste γ_k, dann ist auch die zweite Ungleichung erfüllt, der Satz somit bewiesen.

q.e.d.

Als letztes möchte ich nun auf den Beweis des Maximaltheorems zurückkommen. Wie bereits erwähnt liefert uns der Satz von Calderòn-Zgmund einen alternativen Beweisansatz für das Maximaltheorem Teil b).

Beweisskizze:

Seien $f \geq 0$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, $\Omega = \bigcup_k Q_k$ wie im Satz von Calderòn-Zygmund.

Satz 3 sagt uns, dass

$$m(\Omega) \leq \frac{1}{\alpha} \int f dx.$$

Wir definieren nun Q_k^* als Würfel mit gleichem Mittelpunkt wie Q_k, jedoch mit doppelt so grossem Durchmesser.

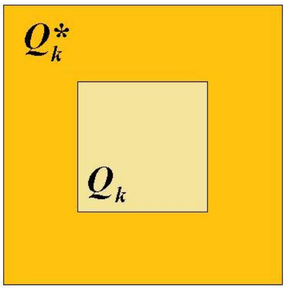

Abbildung 6: Q_k^*

Offensichtlich gilt

$$m\left(\bigcup_k Q_k^*\right) \leq \frac{2^n}{\alpha} \int f dx.$$

Man kann zeigen, dass für eine geeignete Konstante c gilt

$$Mf(x) \leq c\alpha, \quad \text{für } x \notin \bigcup Q_k^*.$$

Das heisst

$$m\left(\{x \,|Mf(x) > c\alpha\}\right) \leq \frac{2^n}{\alpha} \int f dx.$$