Marcinkiewicz-Interpolationssatz:

Grundideen der harmonischen Analysis

Dominik Staub und Francesco Antognini

Zusammenfassung

Ziel dieser Ausarbeitung ist es einen ausführlichen Beweis des Marcinkiewicz-Interpolationssatzes zu geben. Der Satz besagt folgendes. Man betrachtet eine subadditive Abbildung T von $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ in den Raum der messbaren Funktionen. Dabei soll T für alle $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{A \|f\|_{p_0}}{\alpha} \right)^{q_0}$$

und für alle $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{A \|f\|_{p_1}}{\alpha} \right)^{q_1}$$

erfüllen, wobei m das Lebesguemass ist.
Dann gilt folgende Aussage

$$\|T(f)\|_q \leq A \|f\|_p ,$$

für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und für alle Paare $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ im offenen Streckensegment mit Randpunkten $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ und $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$.
Aus diesem Satz folgt direkt eine Ungleichung für die Maximalfunktion.

1 Einige wichtige Definitionen

Zuerst führen wir die Definitionen ein, die wir in dieser Ausarbeitung brauchen werden.

Notation: Seien μ und m das Lebesguemass auf $\mathbb{R}$ bzw. auf $\mathbb{R}^n$.

Definition: Seien $\alpha > 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann ist

$$m(f, \alpha) := m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}).$$

Definition: Seien $\alpha > 0$, $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann ist

$$\mu(h, \alpha) := \mu(\{t \in (0, \infty) : |h(t)| > \alpha\}).$$

Definition: Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$.

- Sei $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ eine Abbildung.
  T heisst vom *Typ* (p, q), falls es ein $A > 0$ gibt, so dass

  $$\|T(f)\|_q \leq A \|f\|_p$$

  für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt.
- Sei $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|f \text{ messbar}\}$ eine Abbildung.
  Falls $q < \infty$ ist, dann heisst T vom *schwachen Typ* (p, q) (Notation: $w-(p, q)$), falls es ein $A > 0$ gibt, so dass für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

  $$m(T(f), \alpha) \leq \left(\frac{A \|f\|_p}{\alpha}\right)^q$$

  für alle $\alpha > 0$ gilt.
  Falls $q = \infty$ ist, dann heisst T vom *schwachen Typ* (p, ∞), falls T vom *Typ* (p, ∞) ist.
  Bemerkung: Ist T (p, q), dann ist T $w - (p, q)$.
  Beweis:
  - $q = \infty$: per Definition.
  - $q < \infty$: Sei A die Konstante aus der Definition, dann gilt für beliebiges $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und beliebiges $\alpha > 0$

  $$\begin{aligned} \alpha^q m(T(f), \alpha) &= \int_{\{x:|T(f)|>\alpha\}} \alpha^q dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |T(f)|^q \, dx \\ &= \|T(f)\|_q^q \leq (A \|f\|_p)^q. \end{aligned}$$

  $\square$

Bemerkung: Die Umkehrung der letzten Aussage gilt im Allgemein nicht. Zum Beispiel ist die Maximalfunktion M $w-(1,1)$, wie im 1. Vortrag gezeigt wurde, aber es gibt Funktionen in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass $M(f)$ nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Also kann M nicht $(1,1)$ sein.

Mit der folgenden Konstruktion bekommen wir für ein $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit der selben Verteilung, die aber für uns nützliche Eigenschaften hat.
Definition: Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\begin{aligned} h^* : (0,\infty) &\rightarrow [0,\infty) \\ t &\mapsto \inf\{\beta > 0, m(h,\beta) \leq t\}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann gelten

1. h^* ist monoton fallend.
2. Für alle $y > 0$ gilt $m(h, h^*(y)) \leq y$.
3. h^* ist rechtsstetig.
4. Für alle $\alpha > 0$ gilt $m(h,\alpha) = \mu(h^*,\alpha)$.
5. $h^* \in L^p((0,\infty))$ und es gilt

$$\|h^*\|_{L^p((0,\infty))} = \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Wie sich herausstellen wird, ist der Punkt 5 für uns sehr wichtig, denn aus einer Abschätzung für $\|h^*\|_{L^p((0,\infty))}$ folgt nun auch eine für $\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
Beweis:

1. Klar nach Definition von h^*.
2. Sei $y > 0$, dann gibt es eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, so dass $\alpha_n \searrow h^*(y)$ und $m(h,\alpha_n) \leq y$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} m(h,h^*(y)) &= m(\{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > h^*(y)\}) \\ &= m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \alpha_n\}) \\ &\overset{\alpha_n \geq \alpha_{n+1}}{=} \lim_{n\to\infty} m(h,\alpha_n) \leq y. \end{aligned}$$

3. Sei $t_n \searrow t \in (0,\infty)$.
   Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} h^*(t_n) = h^*(t).$$

   Da h^* monoton fallend ist, gilt $h^*(t_n) \leq h^*(t_{n+1}) \leq h^*(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt: Es gibt $\alpha \geq 0$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} h^*(t_n) = \alpha \leq h^*(t).$$

   Daraus folgt $m(h,\alpha) \overset{h^*(t_n)\leq\alpha}{\leq} \lim_{n\to\infty} m(h,h^*(t_n)) \overset{2.}{\leq} \lim_{n\to\infty} t_n \leq t$ und somit $h^*(t) \leq \alpha$.

4. Sei $\alpha > 0$. Behauptung: Für alle $t > 0$ gilt: $h^*(t) > \alpha$ genau dann wenn $0 < t < m(h, \alpha)$. (impliziert direkt 4.)
   Beweis:

$$\begin{aligned} \underline{\Rightarrow} &: \text{Sei } t > 0 \text{ mit } \quad \inf\{\beta > 0, m(h,\beta) \leq t\} = h^*(t) > \alpha, \text{dann} \\ &\quad \text{gilt } m(h,\alpha) > t. \\ \underline{\Leftarrow} &: \text{Sei } t > 0 \text{ mit } \quad h^*(t) \leq \alpha \\ &\text{Wegen 2. gilt } m(h, h^*(t)) \leq t, \text{ also auch } \quad m(h,\alpha) \leq t. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \infty > \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|h(x)|} ps^{p-1} ds dx \overset{Fubini}{=} \int_0^\infty ps^{p-1} m(h,s) ds \\ &\overset{4.}{=} \int_0^\infty ps^{p-1} \mu(h^*, s) ds \overset{Fubini}{=} \int_0^\infty h^*(t)^p dt. \end{aligned}$$

$\square$

2 Zwei Integralungleichungen

Im Beweis des Intrepolationssatzes werden wir die folgenden zwei Lemmata brauchen.
Lemma 1 (Hardy):
Sei $1 \leq p < \infty$, $r \geq 0$ und $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ messbar, dann gelten folgende Ungleichungen:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)dy\right)^p x^{-r-1} dx \leq \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty f(y)^p y^{p-r-1} dy \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(y)dy\right)^p x^{r-1} dx \leq \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty f(y)^p y^{p+r-1} dy \tag{2}$$

Für einen Beweis verweisen wir auf das Buch 'Weakly Differentiable Functions' von P. Ziemer (Springer-Verlag).
Lemma 2:
Sei $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine monoton-fallende Funktion. Seien $0 < \widetilde{p} \leq \infty$ und $1 \leq \widetilde{q}_1 \leq \widetilde{q}_2 \leq \infty$. Dann gilt:

$$\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{\widetilde{p}}} h(t))^{\widetilde{q}_2} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}_2}} \leq A \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{\widetilde{p}}} h(t))^{\widetilde{q}_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\widetilde{q}_1}}, \tag{3}$$

wobei A eine Konstante ist, die nicht von h abhängt.
Einen Beweisskizze ist im Anhang des Buches 'Singular integrals and differentiability properties of functions' von E. Stein zu finden.

3 Marcinkiewicz-Interpolationssatz

Um den Satz zu formulieren, legen wir die Exponenten p_i und q_i fest.
Sei $1 \leq p_0 \leq q_0 \leq \infty$ und $1 \leq p_1 \leq q_1 \leq \infty$, so dass $p_0 < p_1$ und $q_0 \neq q_1$.
Dafür sei $L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n) := \{f = f_0 + f_1 : f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n), \quad i = 0, 1\}$.
Man bemerke, dass für ein $p_0 \leq p \leq p_1$ $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ gilt, denn für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & \text{, falls } |f(x)| > 1, \\ 0 & \text{, sonst,} \end{cases} \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \text{ und } f_2 := f - f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n).$$

Satz (Marcinkiewicz):
Sei $T : L^{p_0}(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \to \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ messbar}\}$ eine subadditive Abbildung, die $w - (p_0, q_0)$ und $w - (p_1, q_1)$ ist. Für $0 < \theta < 1$ sei

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Dann ist T (p, q), das heisst es gibt ein $A > 0$, so dass

$$\|Tf\|_q \leq A \|f\|_p, \quad \text{für alle } f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ gilt.}$$

Das schöne an diesem Satz ist, dass man mit nur zwei schwachen Bedingungen beliebig viele starke Ungleichungen bekommt. Das ist im Groben die Idee der Interpolation; mit zwei Informationen kriegt man alles dazwischen.
Beweis des Satzes:
Seien $p_0, q_0, p_1, q_1, \theta, p, q$ und T wie in der Behauptung des Satzes.
Definiere dafür

$$\sigma := \frac{1/q_0 - 1/q}{1/p_0 - 1/p} = \frac{1/q_0 - 1/q_1}{1/p_0 - 1/p_1} = \frac{1/q - 1/q_1}{1/p - 1/p_1}. \tag{4}$$

Um später die Annahmen $w - (p_0, q_0)$, $w - (p_0, q_0)$ anwenden zu können, wird ein $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ wie folgt in f^t und f_t aufgeteilt ($t > 0$). Definiere

$$f^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{, falls } |f(x)| > f^*(t^\sigma), \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und

$$f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f_t(x) := f(x) - f^t(x).$$

Der Beweis wird nun in fünf Schritten geführt. Als erstes werden wir ein Paar technische Details erklären.
<u>Behauptung 1:</u> Sei $t > 0$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann gelten

(i) $(f^t)^*(y) \leq f^*(y)$, für alle $0 < y \leq t^\sigma$,
(ii) $(f^t)^*(y) = 0$, für alle $y > t^\sigma$,

(iii) $(f_t)^*(y) \leq f^*(t^\sigma)$, für alle $0 < y \leq t^\sigma$ und
(iv) $(f_t)^*(y) \leq f^*(y)$, für alle $y \geq t^\sigma$.

Beweis von Behauptung 1:

- Beweis von (i) und (ii): Sei $\beta > 0$, dann gilt nach der Definition von f_t:

$$m(f^t, \beta) = m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \max\{f^*(t^\sigma), \beta\}\}).$$

  Wendet man dies mit $\beta := f^*(y), y > 0$ an, so bekommt man

$$\begin{aligned} m(f^t, f^*(y)) &= m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \max\{f^*(t^\sigma), f^*(y)\}\}) \\ &\leq m(f, f^*(y)) \leq y. \end{aligned}$$

  Hier wurde Punkt 2 der Bemerkung vom Kapitel 1 gebraucht.
  Also gilt: $m(f^t, f^*(y)) \leq y$.
  Daraus folgt $(f^t)^*(y) \leq f^*(y)$.

  Sei nun $y > t^\sigma$, dann gilt für beliebiges $\beta > 0$:

$$m(f^t, \beta) \leq m(f, f^*(t^\sigma)) \leq t^\sigma < y.$$

  Hier wurde wiederum Punkt 2 der Bemerkung vom Kapitel 1 gebraucht.

- Beweis von (iii) und (iv): Sei $\beta > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} m(f_t, \beta) &= m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f_t(x)| > \beta\}) \\ &= m(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(t^\sigma) \geq |f(x)| > \beta\}) \\ &= m(f, \beta) - m(f, f^*(t^\sigma)). \end{aligned}$$

  Also gilt für $\beta := f^*(t^\sigma)$, dass $m(f_t, \beta) = 0 \leq y$, für alle $y > 0$. Daraus folgt direkt (iii).

  Wendet man die obige Gleichung für $\beta := f^*(y), y \geq t^\sigma$, an so folgt

$$\begin{aligned} m(f_t, f^*(y)) &= m(f, f^*(y)) - m(f, f^*(t^\sigma)) \\ &\leq y - m(f, f^*(t^\sigma)) \leq y. \end{aligned}$$

□Beh. 1

In Kapitel 1 haben wir gesehen, dass $T(f)$ und $T(f)^*$ die gleiche q-Norm haben. Im nächten Schritt wird daher nach einer Ungleichung für $T(f)^*(t)$ gesucht.
Behauptung 2: Es gibt ein $B_0 > 0$ und ein $B_1 > 0$, so dass für alle $t > 0$ und alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

- $f^t \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ ist,
- $f_t \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ist

und die folgende Ungleichung gilt:

$$T(f)^*(t) \leq B_0(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_0}} \left\| f^t \right\|_{p_0} + B_1(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_1}} \left\| f_t \right\|_{p_1}.$$

<u>Beweis von Behauptung 2:</u> Sei $t > 0$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach der Definition gilt $p_0 < p < p_1$. Zuerst zeigen wir, dass $f^t \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ und $f_t \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ist.
Falls $f^*(t^\sigma) \neq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left|f^t\right|^{p_0} &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{f^t=0\}} \left|f^t\right|^p \left|f^t\right|^{p_0-p} \overset{\text{Def. von } f^t}{\leq} (f^*(t^\sigma))^{p_0-p} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{f^t=0\}} \left|f^t\right|^p \\ &\leq (f^*(t^\sigma))^{p_0-p} \left\|f\right\|_p < \infty.\end{aligned}$$

Falls $f^*(t^\sigma) = 0$, dann gilt $m(f,0) \leq t^\sigma$.
Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f^t\right|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\neq 0\}} |f|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} t^{\sigma(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})} \left\|f\right\|_p < \infty.\end{aligned}$$

Also ist $f^t \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$.
Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_t|^{p_1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f_t|^{p_1-p} |f_t|^p \overset{\text{Def. von } f_t}{\leq} (f^*(t^\sigma))^{p_1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty,$$

daraus folgt $f_t \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$.
Um die behauptete Ungleichung zu beweisen wird die Annahme, das T $w-(p_0,q_0)$ und $w-(p_1,q_1)$ ist, gebraucht. Genauer gelten, weil $f^t \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $f_t \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ist, die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned}m(T(f^t), A_0(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_0}} \left\|f^t\right\|_{p_0}) &\leq \left(\frac{A_0 \left\|f^t\right\|_{p_0}}{A_0(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_0}} \left\|f^t\right\|_{p_0}}\right)^{q_0} \leq \frac{t}{2} \qquad \text{und} \\ m(T(f_t), A_1(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_1}} \left\|f_t\right\|_{p_1}) &\leq \left(\frac{A_1 \left\|f_t\right\|_{p_1}}{A_1(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_1}} \left\|f_t\right\|_{p_1}}\right)^{q_1} \leq \frac{t}{2},\end{aligned}$$

falls $\left\|f^t\right\|_{p_0} \neq 0$ und $\left\|f_t\right\|_{p_1} \neq 0$ sind.
Hier sind A_0 und A_1 die nicht nicht von t und f abhängenden Konstanten aus der Definition von $w-(p_0,q_0)$ und $w-(p_1,q_1)$.
Daraus folgt:

$$(T(f^t))^*(\frac{t}{2}) \leq A_0(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_0}} \left\|f^t\right\|_{p_0} \tag{5}$$

und

$$(T(f_t))^*(\frac{t}{2}) \leq A_1(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_1}} \left\|f_t\right\|_{p_1}. \tag{6}$$

(5) und (6) gelten auch, wenn $\left\|f^t\right\|_{p_0} = 0$ oder $\left\|f_t\right\|_{p_1} = 0$ ist. Sei $\alpha > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, dann folgt aus $|T(f)(x)| > \alpha$ dass

$$\left|T(f^t)(x)\right| + |T(f_t)(x)| \overset{T \text{ subadditiv}}{\geq} |T(f)(x)| > \alpha.$$

Daher gilt:

$$m(T(f), \alpha) \leq m(T(f^t), \frac{\alpha}{2}) + m(T(f_t), \frac{\alpha}{2}),$$

für jedes $\alpha > 0$. Wenn jetzt $m(T(f^t), \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{t}{2}$ und $m(T(f_t), \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{t}{2}$ für ein $\alpha > 0$ gilt, dann folgt $m(T(f), \alpha) \leq t$.
Also gilt

$$\begin{aligned}
(T(f))^*(t) &\leq \inf\{\alpha > 0 : m(T(f^t), \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{t}{2} \quad \wedge \quad m(T(f_t), \frac{\alpha}{2}) \leq \frac{t}{2}\} \\
&\leq 2\max\{(T(f^t))^*(\frac{t}{2}), (T(f_t))^*(\frac{t}{2})\} \\
&\leq 2(T(f^t))^*(\frac{t}{2}) + 2(T(f_t))^*(\frac{t}{2}).
\end{aligned}$$

Zusammen mit Ungleichung (5) und (6) folgt die noch zu zeigende Ungleichung:

$$(T(f))^*(t) \leq 2A_0(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_0}} \left\|f^t\right\|_{p_0} + 2A_1(\frac{2}{t})^{\frac{1}{q_1}} \left\|f_t\right\|_{p_1}.$$

Hier wurde nur der Fall $q_0 \neq \infty$ und $q_1 \neq \infty$ betrachtet. Die anderen beweist man analog.

□Beh. 2

Wie schon erwähnt, folgt aus Behauptung 2 eine Ungleichung für $\|T(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.
Behauptung 3: Es gibt $B_2, B_3 > 0$, so dass für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|T(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq B_2 \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}} \left\|f^t\right\|_{p_0})^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} + B_3 \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \left\|f_t\right\|_{p_1})^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt.
Beweis von Behauptung 3: Nach Annahme ist $p_0 \leq q_0$ und $p_1 \leq q_1$. Also gilt $p \leq q$ und man kann Lemma 2 anwenden um folgende Ungleichung zu bekommen:

$$\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}}(T(f))^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq A_2 \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}}(T(f))^*(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei $A_2 > 0$ unabhängig von $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ist.
Wendet man nun die Ungleichung aus Behauptung 2 an, so folgt

$$\begin{aligned} \|(T(f))^*\|_q &\leq A_2 \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}} (T(f))^*(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq A_2 B_0 2^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}} \left\| f^t \right\|_{p_0})^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + A_2 B_1 2^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} \left\| f_t \right\|_{p_1})^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Da nach dem 5. Punkt der Bemerkung $\|(T(f))^*\|_q = \|T(f)\|_q$ gilt, folgt daraus die Behauptung.

$\square$Beh. 3

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass sich die beiden Summanden in der Ungleichung von Beh. 3 durch eine Konstante mal $\|f\|_p$ abschätzen lassen. Dies erfolgt in den nächsten beiden Schritten.

Behauptung 4: Es gibt eine Konstante $B_4 > 0$, so dass

$$\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}} \left\| f^t \right\|_{p_0})^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_4 \|f\|_p$$

für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt.
Beweis von Behauptung 4: Sei $t > 0$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} \left\| f^t \right\|_{p_0} &= \left\| (f^t)^* \right\|_{p_0} = \left(\int_0^\infty (y^{\frac{1}{p_0}} (f^t)^*(y))^{p_0} \frac{dy}{y} \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\leq A_3 \int_0^\infty y^{\frac{1}{p_0}} (f^t)^*(y) \frac{dy}{y}, \end{aligned}$$

wobei A_3 eine nach Lemma 2 exisierende Konstante ist, die nicht von f und t abhängt.
Behauptung 1 besagt, dass folgende Abschätzung für $(f^t)^*$ gilt:

$$(f^t)^*(y) \leq \begin{cases} f^*(y), & \text{für } 0 < y \leq t^\sigma, \\ 0, & \text{für } y > t^\sigma. \end{cases}$$

Daher gilt:

$$\left\| f^t \right\|_{p_0} \leq A_3 \int_0^{t^\sigma} y^{\frac{1}{p_0}} f^*(y) \frac{dy}{y}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt für das relevante Integral

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}}\left\|f^t\right\|_{p_0})^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq A_3\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}}\int_0^{t^\sigma} y^{\frac{1}{p_0}}f^*(y)\frac{dy}{y}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{s=t^\sigma}{=} \frac{A}{\sigma^{\frac{1}{p}}}\left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0})}\int_0^{s} y^{\frac{1}{p_0}}f^*(y)\frac{dy}{y}\right)^p \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{A}{\sigma^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{p}{\frac{-p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0})}\right)\cdot \\ &\quad \left(\int_0^\infty (s^{\frac{1}{p_0}-1}f^*(y))^p s^{p+\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0})-1}ds\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung wurde die erste Hardy-Ungleichung mit $r := \frac{-p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}) \geq 0$ gebraucht. Nach der Definition von σ gilt für den Exponenten von s:

$$\begin{aligned}p(\frac{1}{p_0}-1)+p+\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0})-1 &= \frac{p}{p_0}+\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0})-1 \\ &\overset{(4)}{=} \frac{p}{p_0}+p(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0})-1=0\end{aligned}$$

Zusammen mit $\left\|f^*\right\|_p = \left\|f\right\|_p$ folgt die Behauptung.

$\square$Beh. 4

Behauptung 5: Es gibt ein $B_5 > 0$, so dass

$$\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}\left\|f_t\right\|_{p_1})^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_5\left\|f\right\|_p,$$

für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt.
Beweis von Behauptung 5: Sei $t > 0$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig, dann gilt anaolg zum Beweis von Behauptung 4

$$\begin{aligned}\left\|f_t\right\|_{p_1} = \left\|(f_t)^*\right\|_{p_1} &= \left(\int_0^\infty (y^{\frac{1}{p_1}}(f_t)^*(y))^{p_1}\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\leq A_4\left(\int_0^\infty y^{\frac{1}{p_1}}(f_t)^*(y)\frac{dy}{y}\right),\end{aligned}$$

wobei A_4 eine nach Lemma 2 existierende Konstante ist, die nicht von f und t abhängt.
Behauptung 1 besagt

$$(f_t)^*(y) \leq \begin{cases} f^*(t^\sigma), & \text{für } 0 < y \leq t^\sigma, \\ f^*(y), & \text{für } y \geq t^\sigma. \end{cases}$$

Damit folgt aus der obige Ungleichung

$$\|f_t\|_{p_1} \leq A_4 f^*(t^\sigma) p_1 t^{\frac{\sigma}{p_1}} + A_4 \int_{t^\sigma}^\infty y^{\frac{1}{p_1}} f^*(y) \frac{dy}{y}.$$

Für das relevante Integral gilt daher

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \|f_t\|_{p_1})^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq A_4 p_1 \left(\int_0^\infty (f^*(t^\sigma) t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}+\frac{\sigma}{p_1}})^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + A_4 \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \int_{t^\sigma}^\infty y^{\frac{1}{p_1}} f^*(y) \frac{dy}{y})^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&=: I
\end{aligned}$$

Substituiert man mit $s = t^\sigma$, so folgt

$$\begin{aligned}
I &= \frac{A_4}{\sigma^{\frac{1}{p}}} p_1 \left(\int_0^\infty f^*(s)^p s^{\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}+\frac{\sigma}{p_1})-1} ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \frac{A_4}{\sigma^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^\infty (\int_s^\infty y^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(y) dy)^p s^{\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})-1} ds\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Aus der Definition von σ folgt

$$\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} + \frac{\sigma}{p_1}) - 1 \overset{(4)}{=} 0$$

Wendet man die zweite Hardy-Ungleichung auf das zweite Integral mit $r := \frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}) > 0$ an, so folgt

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{A_4}{\sigma^{\frac{1}{p}}} p_1 \left(\int_0^\infty f^*(s)^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \frac{A_4}{\sigma^{\frac{1}{p}}} \frac{p}{\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1})} \left(\int_0^\infty (y^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(y))^p y^{p+\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})-1} dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{A_4}{\sigma^{\frac{1}{p}}} p_1 \|f^*\|_p + \frac{A_4}{\sigma^{\frac{1}{p}}} \frac{p}{\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1})} \|f^*\|_p \leq B_5 \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Hier wurde die Definition von σ verwendet, um dann mit $B_5 := \frac{A_4}{\sigma^{\frac{1}{p}}}(p_1 + \frac{p}{\frac{p}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1})})$ die gewünschte Abschätzung zu bekommen.

$\square$Beh. 5

Wendet man schliesslich die Ungleichungen aus Beh. 4 und 5 auf diejenige in Beh. 3 an, so folgt eine Ungleichung der gewünschten Art.

$\square$Satz

Korollar:
Sei $1 < p \leq \infty$, dann gibt es ein $C > 0$, so dass für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|M(f)\|_p \leq C\|f\|_p$$

gilt.
Beweis: Gemäss dem 1. Vortrag ist M $w-(1,1)$ und $w-(\infty,\infty)$. Somit folgt aus dem Marcinkiewicz-Interpolationssatz, dass M für alle $0 < \theta < 1$ vom *Typ* $(\frac{1}{1-\theta}, \frac{1}{1-\theta})$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

$\square$